

# MODELAGEM MATEMÁTICA DE QUADRICÓPTEROS ATRAVÉS DA ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS NO ESPAÇO DE ESTADOS

Walquíria Do Nascimento Silva<sup>1</sup>, Thiago da Silva Castro<sup>2</sup>

**RESUMO:** Este trabalho apresentará um modelo matemático para o Veículos Aéreos Não Tripulado (VANT) do tipo quadricóptero baseando-se na metodologia em espaço de estado. Levou-se em consideração o comportamento dinâmico em relação aos ângulos de Euler e a altitude  $z$  do quadricóptero, definindo-os em quatro movimentos lineares independentes. Projetou-se um controlador PID utilizando-se o segundo método de Ziegler-Nichols, realizando-se uma análise para uma série de movimentos pré-estabelecidos. O intuito do projeto do controlador é que o sistema se torna estável, e seu desenvolvimento será validado por meio de simulação, cujos resultados obtidos certificarão o funcionamento do mesmo.

**PALAVRAS-CHAVE:** quadricóptero, controle, modelo matemático.

## INTRODUÇÃO

A utilização de Veículos Aéreos Não-Tripulados (VANTs) tem se expandindo rapidamente. O que era exclusivo das atividades militares tem se tornando comum ao campo civil, chegando ao comércio, a indústria e a agricultura, motivados pelo crescente desenvolvimento tecnológico dos sistemas microcontrolados. Pesquisas na área trazem como ganhos a miniaturização dos componentes aliados a redução de custos, bem como o desenvolvimento de novas técnicas.

Existem diferentes classificações para os VANTs. De acordo com Bouabdallah et al. (2004), o termo VANTs é utilizado para caracterizar qualquer tipo de aeronave não tripulada, com finalidades diversas, podendo ser autônoma ou controlada re-

motamente sendo classificados quanto à topologia em asa fixa, asa rotativa entre outras categorias (balões, dirigíveis, planadores e etc.). Já segundo o Regulamento Brasileiro de Aviação Civil Especial nº 94/2017 (RBAC-E nº 94/2017), os VANTs podem ser classificados como aeromodelos, destinadas a recreação e lazer, e aeronaves remotamente pilotadas, destinada a fins comerciais e experimentais.

Devido a estrutura destes veículos, forma de pilotagem, programação permitida e controle de voo, os VANTs vêm sendo utilizados para diferentes atividades como monitoramento, mapeamento e inspeções, além de minimizar os custos operacionais (ALVES, 2012). Nesse trabalho será apresentado um estudo sobre o con-

<sup>1</sup> Walquíria Do Nascimento Silva; IF Sudeste MG - Campus Juiz de Fora; walquiria.nasc@outlook.com

<sup>2</sup> Thiago da Silva Castro; IF Sudeste MG - Campus Juiz de Fora; thiago.castro@ifsudestemg.edu.br

trole e estabilidade de voo do VANT tipo quadricóptero. Pode-se encontrar na literatura diferentes estudos que abrangem essa abordagem, principalmente, no que se refere ao controle de estabilidade dos VANTs. Abaixo serão apresentados a ideologia principal de alguns destes trabalhos.

Conforme apresentado em Bresciani (2008) tem-se que este desenvolveu a modelagem dinâmica do quadricóptero através do modelo de Newton-Euler, projetou algoritmos de controle PID para que aeronave obtivesse um voo estável, cujas variáveis controladas foram os ângulos de Euler e altitude, e por meio de testes certificou-se a robustez dos algoritmos implementados.

Já no trabalho desenvolvido por Sá (2012), foi feito um protótipo de um VANT do tipo quadricóptero, elaborando-se assim, o modelo dinâmico do mesmo através do formalismo Newton-Euler. Baseado na modelagem matemática obtida, projetou-se um controlador do tipo PID embarcado com o objetivo da estabilização na direção vertical da estrutura delineada. Por meio de simulações em softwares e testes práticos, constatou-se eficácia do controlador arquitetado.

E ainda, buscando-se a estabilização ângulos Roll, Pitch e Yaw e altura  $z$  de um quadricóptero, é possível constatar em Benigno (2015) um estudo da aplicação do controlador do tipo PID para o controle destas variáveis. O projeto do controlador foi realizado em software, e mostrou-se satisfatório para que o voo se mantivesse estacionário. Para o desenvolvimento deste estudo, realizou-se a análise da cinemática e dinâmica da aeronave pelo modelo *Euler-Lagrange* e a simplificação em espaço de estados.

Há também outros estudos sendo desenvolvidos e outras técnicas de controle sendo testadas para estabilização de VANTs do tipo quadricópteros, e que têm se mostrado eficazes. No entanto, o estudo deste trabalho está centrado na análise da modelagem dinâmica do quadricóptero

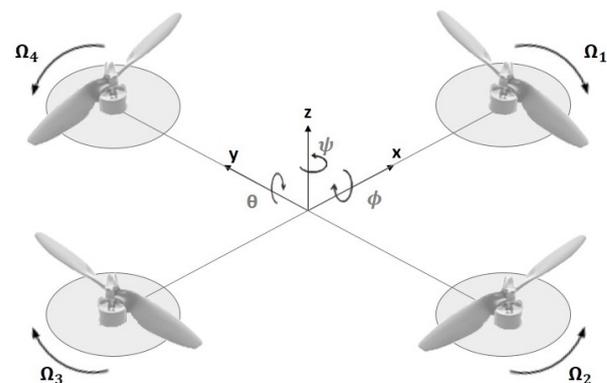
e de sua estabilização por meio do projeto de um controlador PID.

## MATERIAIS E MÉTODOS

### Modelagem matemática de uma aeronave quadricóptero

O quadricóptero é um VANT com classificação de asa rotativa. Sua propulsão é dada por um conjunto de quatro motores junto a dois pares de hélices, um par com propulsão horária, outra com propulsão anti-horária. Esse conjunto motor e hélice são dispostos simetricamente em uma estrutura em forma de cruz, conforme pode ser observado na *Figura 1*, em que hélices adjacentes rotacionam em sentidos opostos, com intuito de equilibrar o momento angular dos motores (SÁ, 2012). Sua aplicação está destinada para atividades que necessitam de uma maior precisão, como mapeamentos e inspeções.

**Figura 1:** Representação do quadricóptero e dos graus de liberdade



Pela *Figura 1* observa-se que o veículo em questão possui seis graus de liberdade, desses: três estão relacionados com a posição espacial do veículo dadas pelos ângulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ , e os outros três estão relacionados com a orientação  $x, y$  e  $z$ . Dispõe de quatro atuadores dados pelos sinais de controle provenientes das forças atuantes nos rotores designados como:  $U_1, U_2, U_3$  e  $U_4$ . Assim, o sistema é caracterizado como subatuado, o que o

torna dinamicamente instável.

De modo simplificado, o quadricóptero pode ser representado em 12 estados, podendo ser divididos em dois vetores: vetor posição e vetor velocidade (SOUSA, 2011).

o Vetor Posição:  $\xi = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$  (1)

o Vetor Velocidade:  $v = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T$  (2)

O vetor posição é composto das coordenadas translacionais ( $x, y, z$ ) e dos ângulos de Euler ( $\phi, \theta, \psi$ ), e o vetor velocidade é composto pelas velocidades lineares ( $u, v, w$ ) e pelas velocidades angulares ( $p, q, r$ ).

O quadricóptero pode ser descrito por equações que representam a cinemática e dinâmica do veículo, propiciando um entendimento maior quanto ao funcionamento, em relação à movimentação e à estabilidade. Dessa maneira, através de um estudo detalhado da modelagem matemática do veículo pelo formalismo de Newton-Euler, obtém-se o sistema de equações que representam a dinâmica conforme apresentado nas Equações 3 e 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = (\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (-\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = (-g + \cos\theta\cos\phi) \frac{U_1}{m} \\ \dot{p} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} qr - \frac{J_r}{I_{xx}} q\Omega + \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr - \frac{J_r}{I_{yy}} p\Omega + \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq + \frac{U_4}{I_{zz}} \end{array} \right. \quad (3)$$

Os elementos  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  da Equação 3 são, respectivamente, os momentos de inércia nos eixos  $x, y$  e  $z$ ;  $\Omega$  representa a velocidade angular dos propulsores;  $m$  a massa total do quadricóptero;  $g$  a aceleração da gravidade e  $J_r$  a força proveniente do efeito giroscópio. Essa conjunto de equações fazem alusão as acelerações lineares ( $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ ) e angulares ( $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ ) do veículo. Esse sistema de equações define o com-

portamento dinâmico do quadricóptero, gerado através da relação de *Newton-Euler* e das forças atuantes no sistema como a força gravitacional, a força gerada pelo efeito giroscópio e a força produzida pela rotação dos propulsores.

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_2 = bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ U_3 = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ U_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ \Omega = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4 \end{array} \right. \quad (4)$$

Esse conjunto de equações representa os sinais de controle do sistema, com  $d$  se referindo ao coeficiente de arrasto,  $b$  o coeficiente de empuxo e  $l$  o comprimento entre o centro das hélices e o centro de gravidade do quadricóptero. O termo  $U_1$  se refere ao controle da altitude ( $z$ ) podendo, dessa forma, gerar um movimento de decolagem e aterrissagem do quadricóptero. Já os sinais de controle  $U_2$  e  $U_3$  são dirigentes aos movimentos de rolagem (rotação em torno do eixo  $x$  representada pelo ângulo  $\phi$ ) e arfagem (rotação em torno do eixo  $y$  representada pelo ângulo  $\theta$ ), respectivamente. O sinal de controle  $U_4$  refere-se ao controle do movimento de guinada (rotação em torno do eixo  $z$  representada pelo ângulo  $\psi$ ).

Dessa forma, pode-se propor técnicas de controle do sistema baseando-se na modelagem matemática da aeronave. Através da integração de sensores, do microcontrolador e conhecendo a planta do sistema, é possível projetar um controle em uma malha de realimentação que propicie o controle para o desempenho desejado do sistema.

**Linearização do modelo matemático do quadricóptero**

O estudo de sistemas dinâmicos envolve a modelagem matemática, a análise e a simulação de sistemas físicos. Pelas equações dinâmicas do quadricóptero, consta-

ta-se a não linearidade do sistema, portanto, para delinear o controle do sistema pela inferência linear deve-se obter um modelo matemático linearizado do veículo, para isso utiliza-se a formulação em espaço de estados.

A realização da modelagem em espaço de estados foi baseada no estudo dos trabalhos de Benigno (2015) e Pfeiffer (2013).

O conjunto de variáveis de estado que descrevem as condições dinâmicas de um sistema modelado no espaço de estado podem ser representadas pela forma (OGATA,2010):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (5)$$

Onde:  $\mathbf{x}$  é o vetor de estados e  $\mathbf{u}$  é o vetor de entradas.

O objetivo deste estudo é obter a representação do sistema em espaço de estados na forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (6)$$

Onde:  $\mathbf{A}$  é matriz de estados,  $\mathbf{B}$  é a matriz de entrada,  $\mathbf{C}$  é a matriz de saída e  $\mathbf{D}$  é a matriz de transmissão direta.

Para efetuar o estudo em espaço de estado é fundamental estabelecer três tipos de variáveis: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado as quais estão presentes na modelagem dinâmica do sistema (OGATA,2010).

Pelas equações 1 e 2 aufere-se os estados de interesse do sistema:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Pelo princípio de funcionamento do quadricóptero tem-se que as entradas do sistema serão:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A saída esperada serão as posições angulares e lineares:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (9)$$

Definindo-se as variáveis de análise é possível determinar as funções da Equação 5.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{x} = (\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi)\frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (-\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi)\frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = (-g + \cos\theta\cos\phi)\frac{U_1}{m} \\ \ddot{\phi} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}qr + \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \ddot{\theta} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}pr + \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \ddot{\psi} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}pq + \frac{U_4}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (11)$$

Uma vez determinadas as funções de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  é efetuada a linearização do sistema, visto que estas possuem elementos não lineares. A fim de se obter a função de transferência do sistema, visando o uso de técnicas de controle lineares, aplica-se o método de equilíbrio (NISE,2013), uma metodologia que consiste em uma solução em regime permanente.

O método consiste no emprego da aproximação linear pela análise da matriz jacobiana. Essa matriz define um valor de uma

função em torno de um ponto particular, no qual serão calculadas as derivadas parciais das funções  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Para obter as matrizes do sistema do espaço de estados estabelecem as matrizes jacobianas descritas abaixo.

$$\mathbf{A} = \frac{\delta f(x, u)}{\delta x} \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\delta f(x, u)}{\delta u} \quad (13)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\delta g(x, u)}{\delta x} \quad (14)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\delta g(x, u)}{\delta u} \quad (15)$$

Considerando-se que as variáveis de estado estão em estados nulos, define-se as matrizes jacobianas. E ainda, para a resolução destas equações designou-se que  $x_1$  a  $x_6$  abrangem os elementos do vetor  $\xi$  e de  $x_7$  a  $x_{12}$  os elementos de  $\xi$ .

A matriz  $\mathbf{A}$  é definida pelas derivadas parciais dos termos de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  em relação aos 12 estados estabelecidos na Equação 7.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Com a matriz  $\mathbf{A}'$  definida como:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \end{bmatrix} \quad (17)$$

A matriz  $\mathbf{B}$  é definida pelas derivadas parciais dos termos de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  em relação as entradas estabelecidos na Equação 8.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{8 \times 4} \\ \frac{1}{m} \\ \frac{1}{I_{xx}} \\ \frac{1}{I_{yy}} \\ \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

A matriz  $\mathbf{C}$  é definida pelas derivadas parciais dos termos de  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  em relação aos 12 estados estabelecidos na Equação 7.

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_{6 \times 6} \quad \mathbf{0}_{6 \times 6}] \quad (19)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é definida pelas derivadas parciais dos termos de  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  em relação as entradas estabelecidos na Equação 8.

$$\mathbf{D} = [\mathbf{0}_{6 \times 4}] \quad (20)$$

### Matriz de transferência e modelagem do controlador

A matriz de transferência do sistema relaciona a matriz de saída à matriz de entrada de um sistema de controle, sendo dada pela Equação 21:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (21)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} \frac{g}{I_{yy}s^4} \\ \frac{-g}{I_{xx}s^4} \\ \frac{1}{ms^2} \\ \frac{1}{I_{xx}s^2} \\ \frac{1}{I_{yy}s^2} \\ \frac{1}{I_{zz}s^2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

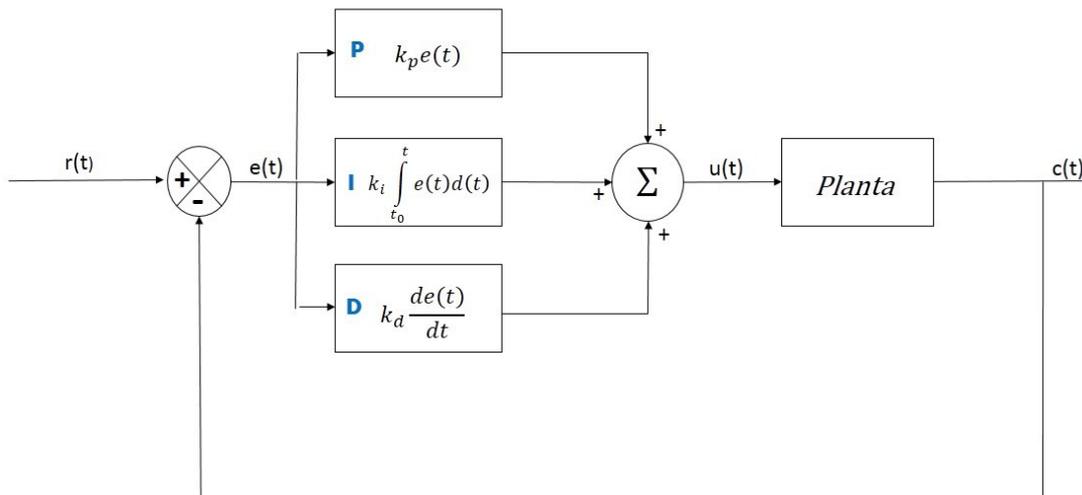
A partir da matriz de transferência  $G(s)$  obtida, torna-se exequível o desenvolvimento do projeto de controle para cada saída de interesse.

Para melhorar a resposta ante às perturbações e diante de instabilidade, foi aplicado um controlador, no intuito de obter-se uma resposta transitória satisfatória e de uma estabilidade relativa. Para este estudo

do escolheu-se utilizar um controlador do tipo controlador Proporcional, Derivativo e Integrativo (PID).

De modo simplificado tem-se que o PID é o controlador composto pelas ações proporcional, integrativa e derivativa que apresenta as características relevantes de cada ação, cuja estrutura é apresentada na *Figura 2*.

**Figura 2** - Estrutura do controlador PID



A ação proporcional aplica uma correção proporcional ao erro aferido pela diferença entre o valor real e o desejado. Essa correção é denominada ganho proporcional ( $k_p$ ). Já a ação integrativa representa a taxa de variação do sinal de saída em relação à entrada, denominada como ganho integrativo ( $k_i$ ), eliminando erros em regime permanente. E por fim, tem-se a

ação derivativa que é a saída proporcional à taxa de variação do erro, sendo esta designada como ganho derivativo ( $k_d$ ) que reduz as oscilações transitórias (ALVES, 2012).

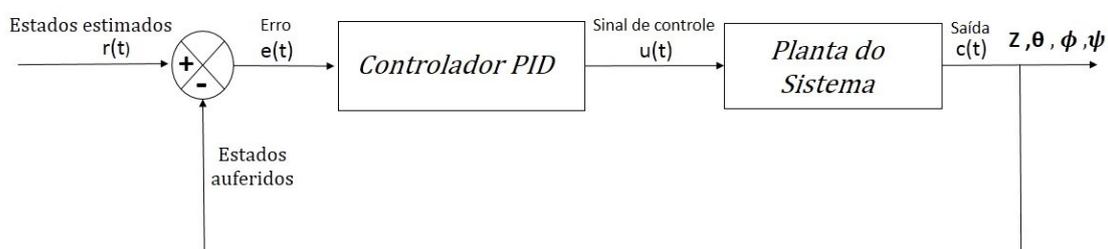
A expressão que modela o controlador PID no domínio da frequência está representada na equação 23:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d \quad (23)$$

O controle proposto para análise do sistema dinâmico do quadricóptero foi implementar um controlador PID independente para cada um dos ângulos de Euler ( $\phi$ ,  $\theta$ ,

$\psi$ ) e para a altitude ( $z$ ). A *Figura 3* apresenta a malha de controle proposta para a estabilização de cada saída analisada no sistema.

**Figura 3** - Proposta da malha de controle para estabilização das saídas do sistema.



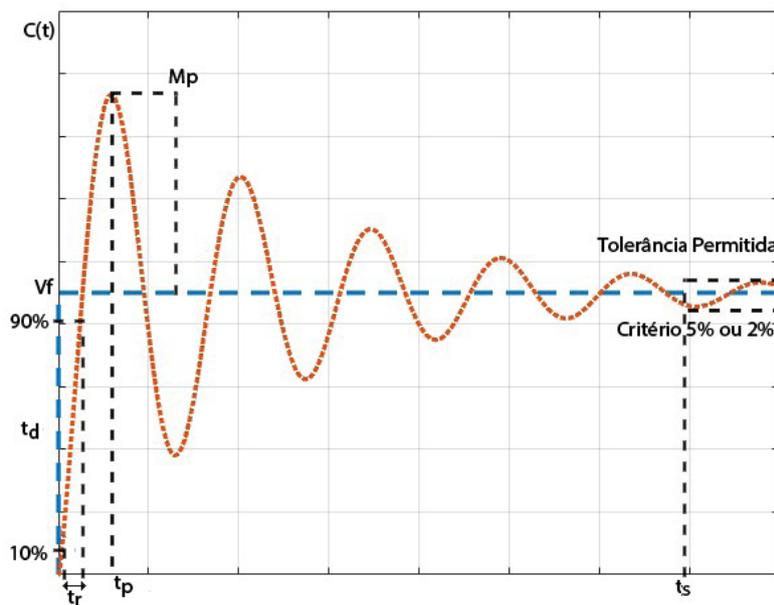
A sintonia do controlador PID foi realizada através do método Ziegler-Nichols, também denominado método do período crítico. De acordo com Ogata (2010), este método é baseado nas características da resposta transitória da planta do sistema. Esta técnica consiste na ação de um controlador proporcional à planta do sistema analisado, cujo valor do ganho proporcional seja aumentado a um valor crítico ( $K_{cr}$ ) que torne o sistema marginalmente estável, isto é, a saída apresenta uma oscilação mantida. Assim, através do ganho crítico e do período oscilatório obtidos, é possível estimar os valores dos parâmetros  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ , e a partir destes são estimados os va-

lores de ganho proporcional ( $k_p$ ), do ganho integrativo ( $k_i$ ) e do ganho derivativo ( $k_d$ ).

### Análise da resposta ao degrau

O desempenho do controlador será verificado através da análise da resposta ao degrau do sistema. Para isso, será necessário especificar as características desse tipo de resposta em um sistema linear e a partir destes, inferir o comportamento para o ajuste dos ganhos de um sistema controlador. Conforme pode ser observado na Figura 4, pode-se parametrizar elementos da saída de um sistema de segunda ordem para avaliar o comportamento.

Figura 4 - Resposta de um degrau unitário típica de um sistema de controle



Dessa forma, definem-se:

- Tempo de atraso ( $t_d$ ): é o tempo para que a resposta alcance pela primeira vez a metade do valor final.
- Tempo de subida ( $t_r$ ): é o tempo para a resposta passar de 0% a 100% do valor final.
- Tempo de pico ( $t_p$ ): é o tempo no qual a resposta atinge o 1.º pico de sobressinal.
- Máximo sobressinal ( $M_p$ ): é o máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor final.
- Tempo de acomodação ( $t_s$ ): é o tempo

no qual a curva de resposta atinge e permanece dentro de uma faixa em torno do valor final.

- Erro de estado estacionário ( $e_{ss}$ ): é a diferença entre a saída do estado estacionário e o valor final.

### RESULTADOS/DISCUSSÃO

Para o cálculo dos ganhos foi considerado o método de Ziegler-Nichols para encontrar o ganho crítico que dá origem aos ganhos proporcional e integral e deriva-

tivo. Uma vez encontrado esses valores, realiza-se um ajuste fino nos parâmetros do controlador de forma a melhorar a resposta de saída.

Foram realizadas análises independentes para três situações:

- Avaliação do modelo  $U_1$  respondendo a uma entrada degrau de 1 metro.
- Avaliação do modelo  $U_2/U_3$  respondendo a uma entrada degrau de 45 graus, simulando o movimento de rolagem.

- Avaliação do modelo  $U_4$  respondendo a uma entrada degrau de 90 graus, simulando uma guinada.

Dessa forma, cada análise será realizada utilizando dois valores para os controladores PID: o primeiro utilizando o método de Ziegler-Nichols; o segundo realizando pelo ajuste iterativo nos ganhos dos controladores de forma a melhorar a resposta de saída.

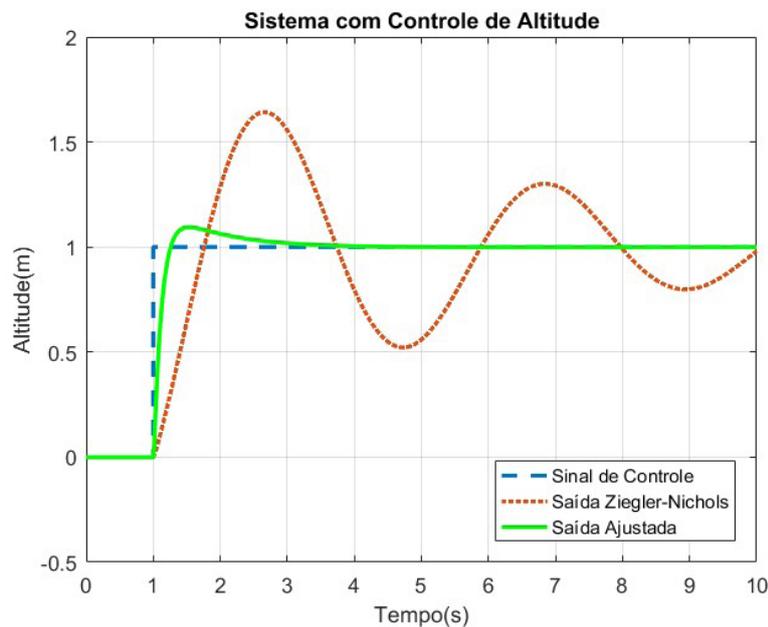
Tabela 1 - Valores para ganho dos controladores

Ganho-PID	Controle da Altitude		Controle de Rolagem/Arfagem		Controle de Guinada	
	Ajuste Ziegler-Nichols	Ajuste Análise Transitória	Ajuste Ziegler-Nichols	Ajuste Análise Transitória	Ajuste Ziegler-Nichols	Ajuste Análise Transitória
$K_p$	3.60	14.5	0.30	0.9	0.3	0.9
$K_i$	2.15	2.2	0.71	0.7	0.5455	0.4
$K_d$	1.51	12.5	0.032	0.4	0.0413	0.5

Na Figura 5 considerou-se que o quadricóptero estava em repouso e aplicou-se uma entrada degrau de amplitude 1 metro (linha tracejada). A resposta para o sistema utilizando os dados obtidos no método de Ziegler-Nichols pode ser observada na

linha pontilhada. Realiza-se um ajuste iterativo nas constantes P, I e D do controlador, tomando como base esse método, pode-se melhorar a resposta do sistema conforme observado na curva contínua.

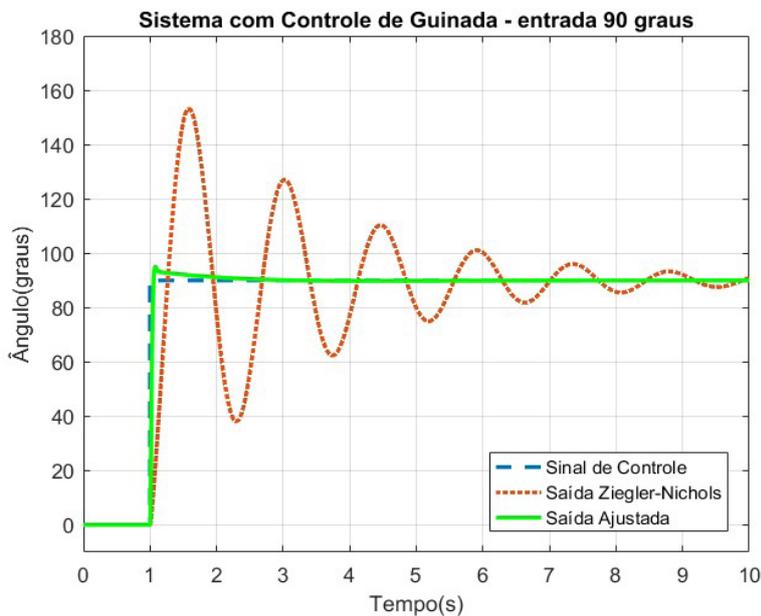
Figura 5 - Resposta do modelo altitude para entrada degrau



Considerando um comando de guinada de 90 graus, indicando uma meia volta do quadricóptero, pode-se observar esse comportamento através *Figura 6*. A linha tracejada caracteriza o sinal de entrada,

a curva pontilhada representa a resposta para o sistema ajustado com os valores obtidos pelo método de Ziegler-Nichols e a curva contínua descreve a saída obtida pelo ajuste iterativo.

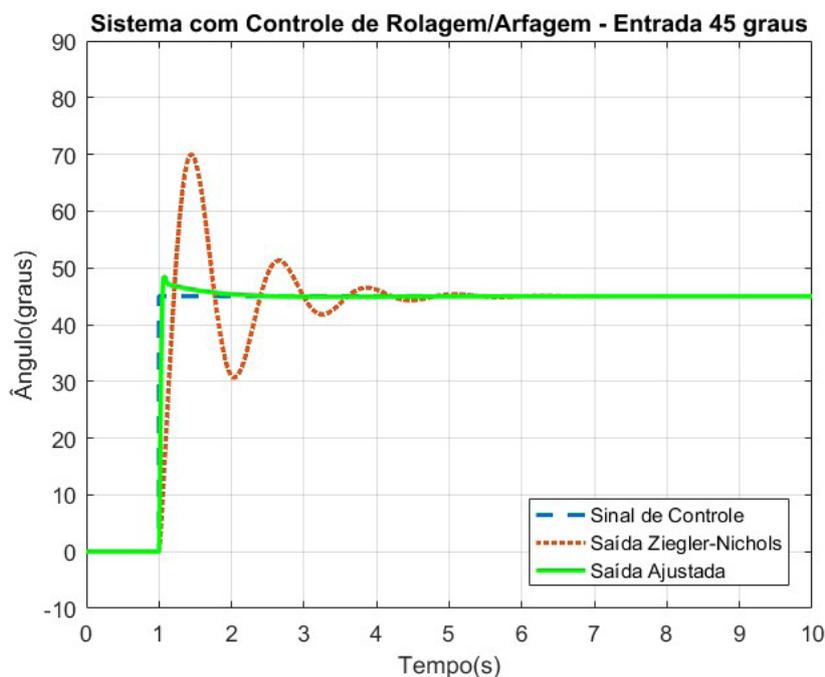
**Figura 6** - Resposta do modelo guinada para entrada degrau



Para o movimento de rolagem foi considerado um limite de 45 graus, uma vez que ângulos maiores podem deixar o quadricóptero instável em relação a sustentação. Na *Figura 7* são apresentados os sinais de controle para o sistema. Nova-

mente, a linha tracejada representa um degrau de entrada em 45 graus, a curva pontilhada a resposta com os valores obtidos da expressão do Ziegler-Nichols e a curva contínua a resposta ajustada.

**Figura 7** - Resposta do modelo rolagem para entrada



Com base na análise da resposta do sistema, é possível constatar através da Tabela 2 a análise dos parâmetros da resposta transitória do sistema a uma resposta ao degrau.

Tabela 2 – Análise dos parâmetros transitórios do sistema

Parâmetros	Controle da Altitude		Controle de Rolagem/Arfagem		Controle de Guinada	
	Ajuste Ziegler-Nichols	Ajuste Análise Transitória	Ajuste Ziegler-Nichols	Ajuste Análise Transitória	Ajuste Ziegler-Nichols	Ajuste Análise Transitória
Tempo de atraso	0.3986s	0.0789s	0.1164s	0.0220	0.1451s	0.0261s
Tempo de subida	0.7591s	0.2643s	0.2105s	0.0519	0.2665s	0.0666s
Instante de pico	1.6761s	0.5453s	0.4593s	0.0760	0.5744s	0.1052s
Sobressinal (%)	64.25%	9.38%	71.92%	7.76%	69.70%	5.55%
Tempo de acomodação	12.82s	1.16s	5.72s	0.11s	6.52s	0.15s

Diante dos dados indicados na Tabela 2, é possível constatar que há uma progressão das curvas de saída da resposta do controle do sistema em relação a referência pretendida, tanto para altitude como dos ângulos de Euler, em cada um dos casos analisados. Verifica-se a melhoria dos parâmetros analisados quando se delimita um comparativo entre o controlador derivado do ajuste Ziegler-Nichols e o controlador efetuado através do ajuste da análise transitória em relação a uma entrada ao degrau.

### CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos, pôde-se verificar a influência do controlador na resposta do sistema ao utiliza-se o método de Ziegler-Nichols. Foram realizados testes para movimentos de altitude, rolagem, arfagem e guinada, todos considerando parâmetros obtidos por essa metodologia, e em seguida realizando um ajuste fino de forma a melhorar a resposta de saída. Dessa forma:

Para o movimento de altitude, utilizando valores obtidos por Ziegler Nichols, a aeronave se estabilizou, tendo um com-

portamento oscilatório em torno do ponto de referência, tempo de acomodação em 12,82 segundos. O ajuste do controlador melhorou esse tempo, tornando o sistema menos oscilatório e se acomodando em 1,16 segundos.

Para os movimentos de arfagem e rolagem, o controlador também se estabilizou em torno do valor de referência, apresentando valores oscilatórios e tempo de acomodação de 5,72 segundos. O ajuste do controlador reduziu esse tempo para 0,11 segundos.

Mesmo procedimento foi realizado para movimentos do tipo guinada, neste caso o método Ziegler Nichols obteve tempo de acomodação em 6,52 e realizando o ajuste conseguiu reduzir esse tempo para 0,15 segundos.

Observando os gráficos e considerando esses tempos de acomodações pode-se concluir que o sistema de controle projetado manteve o sistema estável, mostrando robustez, apesar de simplicidade do controlador projetado. A resposta em si apresentou um amortecimento, baixo nível de sobressinal em relação ao sinal aplicado e rápido tempo de acomodação.

O projeto de controlador ao sistema é

essencial para a estabilidade, esteja a aeronave em hovering (pairando), ou em voo. O intuito do sistema de controle é obter uma resposta rápida e eficaz às perturbações externas, e através dos modelos pode-se estimar os estados de atitude e dos ângulos de Euler estáveis para essas situações.

**ABSTRACT:** *This work presents a mathematical model for a quadcopter type, the Unmanned Aerial Vehicle (UAV), based on state space methodology. Considering the dynamic behavior of the Euler angles and the altitude of the quadcopter, four independent linear movements were defined. A PID controller was designed using the second method of Ziegler-Nichols, performing an analysis for a serie of pre-established movements. The purpose of the controller designing is to stabilize the system, and its development will be validated through simulation, whose results will certify the operation.*

**KEYWORDS:** *quadcopter, control, mathematical model.*

## BIBLIOGRAFIA

ALVES, A. S. C. **Estudo e Aplicação de Técnicas de Controle Embarcadas para Estabilização de Voo de Quadricópteros.** 2012. 121f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia UFJF. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

BENIGNO, T.C.P. **Modelagem matemática de atitude e posição do quadrotor.** 2015. 72 f. Dissertação de Mestrado, Sistemas de Comunicação e Automação. Universidade Federal Rural do Semiárido, Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação. Mossoró.

BENINCAS, F.; CAMARGO, M.A.S.; OKAMOTO JR, J. **Desenvolvimento de um quadricóptero autônomo com controle dinâmico de estabilidade.** 2011. Monografia de conclusão de Curso. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

BRESCIANI, T. Modelling, **Identification and Control of a Quadrotor Helicopter.** Tese (Mestrado) – Lund University, 2008.

BOUABDALLAH, S. **Design and control of quadrotors with application to autonomous flying.** 2007. 155 f. Tese de Doutorado, Escola Politécnica Federal de Lausanne. Lausanne.

CATUNDA, P., VASCONCELLOS, C. **Projeto, Construção e Controle de um Protótipo de um Quadrirotor.** Projeto de graduação em engenharia eletrônica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Eletrônica, 2013

COSTA, S. E. A. P. **Controlo e Simulação de um Quadrirotor Convencional.** 2008. 103f. Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Aeroespacial, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.

NISE, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle,** 6a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**, 5a. ed. Pearson Education do Brasil, 2010.

PFEIFER, E. **Projeto e controle de um UAV quadrirotor**. 2013. 115f. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, São Paulo.

SÁ, R.C. **Construção, modelagem dinâmica e controle PID para estabilidade de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrirotor**. 2012. 67 f. Dissertação Mestrado – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia de Teleinformática, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza.

SILVA, G. M. A. **Desenvolvimento e Controle de um Veículo Autônomo Aéreo Quadro rotor**. 2009.117f. Mestrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores, Laboratório de Sistemas Autônomos, Instituto Superior de Engenharia do Porto, Porto.

SOUSA, J.D.A. **Simulação e Desenvolvimento de um Veículo Aéreo Autônomo de Quatro Rotores**. 2011. 178 f. Dissertação de Mestrado, Engenharia Eletrotécnica e de Computadores. Faculdade de Engenharia. Universidade de Porto. Porto

Submetido em: 01/08/2017

Aceito em: 02/01/2018