ASPECTOS CLÁSSICOS DA ELETRODINÂMICA DE CARROLL-FIELD-JACKIW

Classical Aspects of Electrodynamics of Carroll-Field-Jackiw

Paulo Roberto Fernandes Alves[1] e Victor José Vasquez Otoya[2]

Resumo: No presente trabalho, tem-se como objetivo investigar e apresentar alguns aspectos significativos da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), além de fazer a apresentação de alguns conceitos e métodos básicos usados tanto na eletrodinâmica usual, quanto no modelo com violação de simetria. Tal eletrodinâmica é obtida via implementação de campos de fundo (backgrounds), responsáveis pela violação da invariância de Lorentz e a investigação teve início na lagrangeana, onde foram recuperadas as equações de movimento, posteriormente às equações de onda e também teorema de Poynting (todos os cálculos usando apenas métodos matemáticos básicos de graduação). Ulteriormente, iniciou-se, talvez a parte mais relevante do trabalho, a busca pelo pro-pagador (AμAυ), que é de grande importância em uma teoria de campos, pois o cálculo do mesmo permite o estudo da consistência de uma teoria e consequentemente a possibilidade da elaboração de uma teoria de campo quantizável proveniente do modelo e isso é feito a partir do estudo de interações (amplitude de espalhamento) em mecânica quântica. O objetivo aqui não é efetuar uma analise efetiva e minuciosa da teoria, como já dito anteriormente, mas demonstrar uma maneira de apresentar a teoria de forma mais simples, tornando assim mais acessível o entendimento de alguns dos pontos chaves do modelo e suas diferenças em relação ao eletromagnetismo usual de Maxwell. Foram utilizados métodos matemáticos que simplificam a maioria dos cálculos, métodos esses que estão presentes no âmbito da graduação em física, até mesmo nas licenciaturas.

Palavras-chave: Violação de Lorentz, Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw, soluções clássicas.

Abstract: *The present work has as objective to investigate and present some significant aspects of*

[1] Bolsista de Iniciação Científica do IF Sudeste MG - Campus Juiz de Fora, pauloalves.fisica@gmail.com
[2] Professor do Núcleo de Física do IF Sudeste MG - Campus Juiz de Fora , vjvo77@gmail.com

electrodynamics Carroll-Field-Jackiw (JTC), in addition to the presentation of some basic concepts and methods used both in usual electrodynamics, as in the model with violation of symmetry. Such electrodynamics is achieved via implementation of background fields (backgrounds), responsible for violation of Lorentz invariance and the investigation began in Lagrangian, which were recovered the equations of motion, subsequent to the wave equations and also Poynting theorem (all Calculations using only basic mathematical methods of graduation). Thereafter, it was started, perhaps the most relevant part of the work, the search for the spreader ($A\mu A\nu$), which is of great importance in a field theory, because the same calculation allows the study of consistency of theory and consequently the possibility the development of a quantum portion field theory from the model and this is done from the interaction study (scattering amplitude) in quantum mechanics. The goal here is not to make an effective and thorough analysis of the theory, as I said earlier, but demonstrate a way to present the theory in a simpler way, thus making it more accessible understanding of some of the model key points and their differences the usual electromagnetism Maxwell. Mathematical methods were used to simplify the majority of the calculations, these methods are present within the physics degree, even in degrees.

Keywords: *Lorentz violation, Carroll-Field-Jackiw Eletrodynamics, classical solutions.*

INTRODUÇÃO

Sem duvidas, uma das mais bem sucedidas teorias do século XIX foi a teoria eletromagnética proposta por James Clerk Maxwell em 1873 (MAXWELL 1873), que formalizou matematicamente a unificação entre eletricidade e magnetismo, entre eletromagnetismo e óptica, tendo a comprovação matemática de que a luz era um fenômeno provocado por oscilações de campos magnéticos e elétricos (ondas eletromagnéticas com velocidade c = 29979245S m/s).

A teoria eletromagnética de Maxwell teve grandes implicações, não somente como teoria efetiva, mas também pelas consequências posteriores a sua formulação. A consequência mais importante dessa teoria é sem duvida a Teoria da Relatividade Restrita (T.R.R.) proposta por Albert Einstein em 1905 (EINSTEIN 1905), que adveio da necessidade da obtenção de uma nova teoria cinemática capaz de contemplar de forma coerente fenômenos eletromagnéticos assim como a luz.

Uma das principais características desta teoria é a flexibilização dos conceitos de espaço e tempo, até então tidos como entidades absolutas. Uma segunda, e ainda mais fundamental característica desta teoria é a implementação de um novo principio da relatividade que fosse valido para todos os fenômenos da física, inclusive os de natureza eletromagnética, e tal princípio estaria em contraste com o princípio da relatividade de Galileu, valido somente para a mecânica newtoniana (baixas velocidades, u «c).

Em seu princípio da relatividade, Einstein postula que toda a física deve ser invariante segundo um determinado grupo de transformações de coordenadas de uma mudança de referencial, e essas transformações, são denominadas Transformações de Lorentz, as quais determinam o principio da indistinguibilidade entre referenciais, já que a física deve ser a mesma para todos.

A T.R.R. já teve sua comprovação experimental atestada em diversos fenômenos, tais como efeito Doppler relativístico e a polarização da luz emanada de galáxias distantes entre outros, e é considerada uma das mais bem sucedidas teorias físicas já formuladas pelo homem, pois até o presente momento não existem fenômenos que contrariem tal teoria. Além do mais, o principio da relatividade restrita impõe a existência de uma nova simetria da natureza: a covariância de Lorentz. Tal simetria diz que, considerando as transformações de Lorentz e as perspectivas de diferentes referenciais inerciais, é possível que se escreva toda e qualquer lei física da mesma forma matemática (em qualquer referencial inercial).

Existem inúmeras evidências confirmadas com elevados níveis de precisão, de que a covariância de Lorentz seja de fato uma simetria fundamental da natureza. Neste contexto, há uma questão que ainda aguarda por respectiva resposta, questão que está diretamente associada à covariância de Lorentz. Resta verificar se esta covariância é uma simetria exata ou aproximada da natureza, ou seja, deve-se ainda verificar até que ponto esta simetria é valida. Isto equivale a impor limites máximos para uma eventual quebra da SL (CAROLL 1990).

Com objetivos de estabelecer um limite para a validade da covariância de Lorentz nos mais diversos sistemas físicos, alguns teóricos propuseram modelos onde a violação da SL é admitida e controlada por alguns coeficientes de quebra. Este limite máximo poderia ser entendido com uma faixa de tolerância para a admissão da violação da simetria de Lorentz (VSL) a ser estabelecida, obviamente, respeitando a precisão de resultados experimentais conhecidos.

Neste sentido, o pioneiro trabalho foi concebido, no inicio da década de 1990, a partir de uma cooperação entre Sean M. Carroll, George B. Field e Roman Jackiw (CAROLL 1990), um modelo teórico definido em (1+3) dimensões, concebido com base no eletromagnetismo de Maxwell mais um termo do tipo Chern-Simons, $\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^{\beta} A^{\alpha} F^{\rho\varphi}$, onde V^{β} é um background ao qual se atribui a violação de Lorentz. Dessa forma busca-se apresentar de maneira clara e objetiva alguns dos aspectos mais relevantes da teoria eletromagnética.

MÉTODOS

O objeto do estudo deste capítulo é um subproduto do setor de gauge do Modelo Padrão Estendido (M.P.E.): a eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (C-F-J). O setor de gauge (puro) do MPE é amplamente considerado com dois objetivos principais: (i) a determinação de novos efeitos eletromagnéticos originados pelo background e (ii) a imposição via dados experimentais de limites superiores rigorosos sobre a magnitude deste campo de fundo. Vale salientar que de forma pioneira, Sean M. Carroll, George B.Field e Roman Jackiw, publicaram em 1990 um artigo onde consideraram o eletromagnetismo de Maxwell na presença do termo $\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^{\beta} A^{\alpha} F^{\rho\varphi}$, responsável pelas violações das simetrias de Lorentz e CPT (CPT ímpar). Desta forma, os autores obtiveram um modelo de eletrodinâmica, denominado de eletrodinâmica de (CFJ), invariante sob as transformações de gauge (calibre).

E é nesse cenário de eletrodinâmica que o presente trabalho se inicia, partindo das equações de campo e chegando as equações de onda, e finalmente ao teorema de Poynting(Jackson 1999). E ulteriormente, será introduzido o cálculo do propagador de uma maneira didaticamente mais simples, fazendo apenas o uso das series geométricas.

ASPECTOS CLÁSSICOS

Aqui serão obtidos alguns resultados clássicos relevantes no modelo C-F-J. Vale ressaltar que tal teoria também é invariante perante uma transformação de calibre, assim como a eletrodinâmica de Maxwell $A'_U \rightarrow A_U + \wedge$, nas equações de campo.

a. **EQUAÇÕES DE CAMPO**

O inicio análise partiu exatamente da densidade lagrangeana do campo de Carol-Field-Jackiw:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\alpha v}F^{av} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\gamma}V^{\beta}A^{\alpha}F^{\rho\gamma} + J_{\alpha}A^{\alpha} \tag{1}$$

As equações de Maxwell estendidas, equações de movimento da eletrodinâmica de C-F-J que são obtidas via a equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_v \frac{\partial L}{\partial(\partial_v A_\alpha)} = \frac{\partial L}{\partial A_\alpha} \tag{2}$$

A substituição de L em (2) implica em :

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_v A_\alpha)} = F^{\alpha v},$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_\alpha} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}V_{\beta}F^{\rho\varphi} + J^{\alpha},$$

Arranjando esses resultados temos:

$$\partial_v F^{v\alpha} + V_{\beta}\tilde{F}_{\rho\varphi} = -J^{\alpha}, \tag{3}$$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0. \tag{4}$$

A equação (3) é a equação de Maxwell modificada (forma tensorial) prevista pela eletrodinâmica de C-F-J. Verifica-se a presença explícita do campo V_β na equação (3) e (4) a Identidade de Bianchi(Jacson1999). Nestas equações, foram usadas as seguintes definições:

$$F_{v\rho} = \partial_v A_\rho - \partial_\rho A_v, \tag{5}$$

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\nu\rho}F_{\nu\rho}, \tag{6}$$

Sendo $F_{\nu p}$o tensor do campo eletromagnético, $\tilde{F}^{\alpha\beta}$o tensor dual do campo eletromagnético e $\varepsilon^{\alpha\beta\nu\rho}$ e o símbolo de Levy-Civita escrito em quatro dimensões. As eq. (3)e (4) conduzem à forma explicita das equações de Maxwell escritas em termos dos campos E e B. Onde a equação (3) dá origem as equações (7) e (8) e a equação (4) gerou as equações (9) e (10).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} + \mathrm{v} \cdot \boldsymbol{B} = -\rho, \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} + \mathrm{v}_0 \mathbf{B} - \mathrm{v} \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}, \tag{8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}, \tag{10}$$

As equações (7) e (8) são, respectivamente, as leis de Gauss (na qual ρ é a densidade de carga) e Ampére (na qual $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente) estendidas. Por conta da presença dos campos de fundo, é impossível dissociar os campos elétrico e magnético. Nesta situação, uma densidade carga ρ será não somente fonte do campo elétrico, mas também do campo magnético. O que pode ser visto claramente observando à equação (7). De forma análoga pode-se observar a mesma situação na equação (8), onde a densidade de corrente J gera não somente campo magnético, mas também campo elétrico. E quando é considerada uma situação em que não existam fontes (ρ = 0 e J = 0), é possível notar nas equações (7) e (8), que campos magnéticos e elétricos atuam como fontes.

b. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

De acordo com os conceitos da eletrodinâmica usual (Maxwell1873), os campos elétricos e magnéticos variáveis, se propagam através do espaço em forma de perturbações, denominadas ondas eletromagnéticas (E.M.). O objetivo aqui é investigar os efeitos da quebra da S.L. nas ondas eletromagnética e tais efeitos podem ser observados manipulando as equações (8) e (10) da seguinte forma:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} + \mathrm{v}_0 \mathbf{B} - \mathrm{v} \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}, \tag{11}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E} = \partial_t \mathbf{B}), \tag{12}$$

Obtêm-se as equações de onda para os campos B e E, respectivamente, sem fontes de campo (com ρ = 0 e J = 0):

$$\Box \mathbf{B} + \mathrm{v}_0 (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathrm{v} \times \mathbf{E}), \tag{13}$$

$$\Box \mathbf{E} + \partial_t (\mathrm{v} \times \mathbf{E}) = \nabla (\mathrm{v} \cdot \mathbf{B}) + \mathrm{v}_0\, \partial_t \mathbf{B}. \tag{14}$$

Onde □ é o operador D'alembertiano. Nas equações de onda, pode-se notar da mesma forma que nas equações de campo, a impossibilidade de separação de B e E, ou seja, a não linearidade das equações.

c. **TEOREMA DE POYNTING**

O campo eletromagnético é capaz de transportar energia, momento linear e momento angular, e, portanto produz pressão e outros efeitos físicos. O teorema será deduzido a partir de primeiros princípios, denominado Teorema de Poynting(, devido ao físico que o obteve, onde está associado à conservação de energia em um sistema de cargas e campos. Com as equações de campo, em mãos, é possível agora explorar outro ponto importante de qualquer teoria eletromagnética, a sua conservação de energia. E analogamente a ao que se faz na teoria usual de Maxwell, irá ser usado o teorema de Poynting. Primeiramente será apresentada a equação (8), multiplicando-a escalarmente por E:

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{E} + \mathrm{v}_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{v} \times \mathbf{E} = 0 \tag{15}$$

Tomando a seguinte identidade vetorial:

$$\mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}),$$

E fazendo algumas substituições simples, tem-se que:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \partial_{\mathrm{t}} \left(\frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) = \mathrm{v}_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}, \tag{16}$$

Onde o termo $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ é o vetor de Poynting $(\vec{S})$, e o termo $\partial_{\mathrm{t}} \left(\frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right)$ corresponde à densidade de energia do campo eletromagnético (u_{em}), no entanto o termo $\mathrm{v}_0 \mathrm{B}.\mathrm{E}$ não se encaixa em nenhuma parte da equação. Então nesse termo, é necessária a seguinte substituição:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \varphi - \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{dt}}$$

Onde A é o potencial vetorial e φ o potencial escalar. E através de uma manipulação algébrica relativamente simples chegamos a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B} + \frac{\mathrm{v}}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \right) - \partial_{\mathrm{t}} \left(\frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2} + \frac{\mathrm{v}_0}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) = 0 \tag{17}$$

Note que a equação (17) é análoga a equação de continuidade do campo eletromagnético usual $(\nabla . \vec{S} - \partial_t u_{em} = 0)$. Tem-se como densidade de energia do campo $\mathrm{u}_{\mathrm{CFJ}} = \frac{\mathrm{E}^2}{2} + \frac{\mathrm{B}^2}{2} + \frac{\mathrm{v}_0}{2} \mathrm{A}.\mathrm{B}$, e como vetor de Poynting $(\mathbf{S}_{\mathrm{CFJ}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \frac{\mathrm{v}}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$. Note que agora a densidade de energia foi incrementada pelo termo $\boldsymbol{v} \frac{\mathrm{v}_0}{\mathbf{2}} \mathbf{A}.\mathbf{B}$ e a parte vetorial da equação de continuidade ganhou o termo $\frac{\mathrm{v}}{2} \mathrm{B}.\mathrm{A}$. O que demonstra de forma clara, a influência do campo de fundo tanto na energia quanto na parte vetorial do campo eletromagnético, portanto se por acaso a presença de tal *background* fosse observada em algum momento seria necessária a modificação das Leis

Clássicas do eletromagnetismo.

CÁLCULO DO PROPAGADOR

Para que seja averiguada a possibilidade de realizar uma quantização consistente deste modelo deve se averiguar três aspectos básicos de uma teoria. São eles: estabilidade, causalidade e unitariedade. Para que seja efetivada a referida averiguação, é imprescindível o cálculo do propagador $(A_\mu A_\nu)$ associado ao campo de gauge A_μ (CASSANA 2008).

Em teoria de campos o método usado para esse cálculo é o dos operadores projetores, no entanto o presente trabalho tem como objetivo a obtenção de tal ferramenta por meio de um método alternativo (diferente do método de projeção de operadoes) e simples, as séries geométricas. O propagador pode ser obtido a partir da ação S característica no modelo:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^{\beta}A^{\alpha}F^{\rho\varphi} + J_\alpha A^\alpha\right) \tag{18}$$

Objetiva-se aqui escrever a eq. (18) com a forma $S = \int d^4 x A_\mu \boxplus^{\mu\nu} A_\nu$, onde o termo $\boxplus^{\mu\nu}$ é o chamado operador de onda. E como já é conhecido na eletrodinâmica usual o cálculo da função do propagador requer a introdução de um termo de fixação de calibre para que o mesmo seja determinado de forma unívoca, pois o operador de onda tem autovalores nulos, portanto ele não tem inverso. E para a Lagrangeana de C-F-J, acontece o mesmo, então podemos considerar o seguinte termo de fixação de calibre$\frac{1}{2a}(\partial_\mu A^\mu)^2$. Assim a S fica da seguinte forma:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^{\beta}A^{\alpha}F^{\rho\varphi} + J_\alpha A^\alpha\right) - \frac{1}{2a}(\partial_\alpha A^\alpha)^2 \tag{19}$$

Logo, manipulando a equação (19) para chegar-se a forma $S = \int d^4 x A_\mu \boxplus^{\mu\nu} A_\nu$ é fácil ver que o operador $\boxplus_{\beta\alpha}$fica assim:

$$\boxplus_{\beta\alpha} = \Box\left[\eta_{\beta\alpha} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{\partial_\beta \partial_\alpha}{\Box} + \varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}\frac{V^\varphi \partial^\rho}{\Box}\right], \tag{20}$$

Porém matematicamente falando não é permitido usar a notação $\left(\frac{1}{\square}\right)$, então é necessário aplicar a transformada de Fourier para que tenhamos ao invés de $\boxplus(x)$ tenhamos um $\boxplus(k)$ (espaço dos momenta). Após tal transformação o operador de onda fica com a seguinte forma:

$$\widetilde{\boxplus}\,(k) = -k^2\left[\eta_{\beta\alpha} - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2} + i\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}\frac{V^\varphi\,\partial^\rho}{k^2}\right], \quad (21)$$

Como demonstrado, é possível ver $\partial_\beta = ik_\beta$. Pela definição da função de Green, temos $\left(A_\mu(k)A_\nu(k)\right) \equiv \widetilde{\boxplus}^{-1}\,(k)$. Então tudo que temos que fazer para encontrar a função de Green é inverter o operador de onda. A forma mais usada de realizar essa inversão, é através da seguinte relação $\boxplus_{\beta\alpha}\,\Delta^{\alpha}_{v} \equiv \eta_{\beta v,}$ porém muitas vezes encontrar a matriz Δ^{α}_{v}, requer um arcabouço matemático um pouco mais elaborado. Logo neste trabalho pretendemos inverter esse operador de uma forma diferente, usando a série geométrica e para isso tomaremos a seguinte relação:

$$\left(\delta^{\nu}_{\mu} - \xi\right)^{-1} = \delta\_\mu\text{^}v+\xi+\xi\text{^}2+\xi\text{^}3\ldots, \quad (22)$$

onde:

$$\xi = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{k_\beta k_\alpha}{k^2} + S_{\beta\alpha} \quad (23)$$

a partir disso, é preciso definir os seguintes operadores: $S_{\beta\alpha} = i\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}\frac{V^\varphi\,\partial^\rho}{k^2}$; $\varpi_{\beta\alpha} \equiv \frac{k_\beta k_\alpha}{k^2}$; $\theta_{\beta\alpha} \equiv \eta_{\beta\alpha} - \varpi_{\beta\alpha}$; $\Sigma_{\beta\nu} \equiv V_\beta k_\nu$; $\Lambda_{\beta\nu} \equiv V_\beta k_\nu$; $\lambda \equiv V_\alpha k^\alpha$; $S_{\beta\alpha}S_{\alpha\nu} \equiv f_{\beta\nu} = -\frac{1}{k^4}\left[(V^2k^2-\lambda^2)\theta_{\beta\nu} - \lambda^2\varpi_{\beta\nu} + \lambda\Sigma_{\beta\nu} + \lambda\Sigma_{\nu\beta} - k^2\Lambda_{\beta\nu}\right]$.

Onde S, ϖ, θ, Σ, Λ, são chamados operadores projetores. E suas propriedades multiplicativas podem ser observadas na tabela a seguir:

	$\varpi_{\alpha\nu}$	$\theta_{\alpha\nu}$	$S_{\alpha\nu}$	$\alpha\nu$	$\nu\alpha$	$\alpha\nu$
$\varpi_{\beta\alpha}$	$\varpi_{\beta\nu}$	0	0	$\lambda\varpi_{\beta\nu}$	$\nu\beta$	$\frac{\lambda}{k^2}\ \nu\beta$
$\theta_{\beta\alpha}$	0	$\theta_{\beta\nu}$	$S_{\beta\nu}$	$\beta\nu - \lambda\varpi_{\beta\nu}$	0	$\beta\nu - \frac{\lambda}{k^2}\ \nu\beta$
$S_{\beta\alpha}$	0	$S_{\beta\nu}$	$f_{\beta\nu}$	0	0	0
$\beta\alpha$	$\beta\nu$	0	0	$\lambda\ \beta\nu$	$k^2\ \beta\nu$	$\lambda\ \beta\nu$
$\alpha\beta$	$\lambda\varpi_{\beta\nu}$	$\nu\beta - \lambda\varpi_{\beta\nu}$	0	$V^2k^2\varpi_{\beta\nu}$	$\lambda\ \nu\beta$	$V^2\ \nu\beta$
$\beta\alpha$	$\frac{\lambda}{k^2}\ \beta\nu$	$\beta\nu - \frac{\lambda}{k^2}\ \nu\beta$	0	$V^2\ \beta\nu$	$\lambda\ \beta\nu$	$V^2\ \beta\nu$

Tabela 1- Álgebra dos operadores projetores.

Com essas propriedades em mãos agora se pode inverter o operador $\boxplus_{\beta\alpha}$:

$$\widetilde{\boxplus}^{-1}\,(k) = -k^2\left[\eta_{\mu}^{v} + \xi + \xi^2 + \xi^3 \ldots\right], \tag{24}$$

note que nesse caso foi usado η_{μ}^{v} ao invés δ_{μ}^{v}, porém ambos, nesse caso tem o mesmo significado. Após o desenvolvimento dos termos dessa série de potencias até o grau 8,será obtido a seguinte configuração:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\boxplus}_{\beta\alpha})^{-1} = {} & -\frac{1}{k^2}\left\{\eta_{\alpha\beta} - \left[\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\cdots\right]\varpi_{\beta\alpha} + \left[\left(\frac{V^2k^2-\lambda}{k^4}\right)+\cdots\right]\theta_{\beta\alpha}\right. \\ & + \left[1-\left(\frac{V^2k^2-\lambda}{k^4}\right)+\cdots\right]S_{\beta\alpha} + \left[1-\left(\frac{V^2k^2-\lambda}{k^4}\right)+\cdots\right]\frac{\lambda\Xi_{\alpha\beta}}{k^4} \\ & \left. + \left[1-\left(\frac{V^2k^2-\lambda}{k^4}\right)+\cdots\right]\frac{\Lambda_{\alpha\beta}}{k^4} - \left[1-\left(\frac{V^2k^2-\lambda}{k^4}\right)+\cdots\right]\frac{\lambda^2\varpi_{\alpha\beta}}{k^4}\right\}\end{aligned} \tag{25}$$

onde $\Xi = \Sigma_{\beta\alpha} + \Sigma_{\alpha\beta.}$ Como é possível ver, existe uma série geométrica associada a cada operador projetor. Determinando a convergência de cada uma dessas séries, nosso operador $\widetilde{\boxtimes}^{\,-1}(k)$, adquire a seguinte forma:

$$(\widetilde{\boxtimes}_{\beta\alpha})^{-1} = -\frac{1}{k^2}\left\{\left[1+\left(\frac{V^2k^2-\lambda}{H}\right)\right]\theta_{\beta\alpha} + \left[\alpha-\left(\frac{\lambda^2}{H}\right)\right]\varpi_{\beta\alpha} + \left(\frac{k^2}{H}\right)S_{\beta\alpha} + \left(\frac{\lambda}{H}\right)\Xi_{\alpha\beta} - \left(\frac{k^2}{H}\right)\Lambda_{\alpha\beta}\right\} \tag{26}$$

onde $H = k^4 - V^2k^2 + \lambda$. Lembrando que a função de Green $\left(A_\mu(k)A_\nu(k)\right) = \widetilde{\boxtimes}^{-1}(k)$, logo:

$$\left(A_\mu(k)A_\nu(k)\right) = \frac{1}{k^2(k^4 - V^2k^2 + \lambda)}\left\{[k^4 + \lambda - \lambda^2]\theta_{\beta\alpha} + [\alpha(k^4 - V^2k^2 + \lambda) - \lambda^2]\varpi_{\beta\alpha} + k^2 S_{\beta\alpha} + \lambda\Xi_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta}\right\} \quad (27)$$

Vale salientar que apesar do método de obtenção do propagador não ser o método usual, ainda sim ele é eficiente, pois o propagador acima esta de acordo com os calculados da bibliográfica consultada. Dessa forma se introduz uma maneira mais didática de apresentar o cálculo do propagador. Vale ressaltar ainda que a função de Green(Jackson1999) correspondente ao modelo é apenas o propagador saturado com uma corrente e isso pode ser obtido via imposição do calibre de Lorentz,$\delta_\mu A^\mu = 0$, no princípio do cálculo.

Com o propagador em mãos é possível obter várias informações relevantes sobre a teoria. Como foi dito anteriormente, para que se possa validar uma teoria como uma possível teoria quântica de campos efetiva, ela deve respeitar três aspectos essenciais: unitariedade, causalidade e estabilidade, e para testar a validade desses três princípios deve-se obter as relações de dispersão via analise dos polos do propagador. No presente trabalho o cálculo será omitido. Mas vale a pena comentar que somente para um *background* do tipo espaço $V^\mu = (0, v)$, a teoria pode ser dita estável, causal e unitária (CASSANA 2008). Outro importante resultado obtido pela análise do propagador são as soluções clássicas, obtidas a partir da Função de Green, chegando, a soluções como lei de Coulomb, e a lei de Biot-Savart respectivas do modelo (CASSANA 2008).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nessa seção pretende-se comparar os resultados obtidos pela eletrodinâmica de Carol-Field-Jackiw, com os resultados da eletrodinâmica de Maxwell. Para começar tal análise toma-se as equações de campo de cada um dos modelos.

- Para C-F-J tem-se: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} + v_0 \mathbf{B} - v \times \mathbf{E} = -J$; $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} + v \cdot \mathbf{B} = -\rho$, que são respectivamente a lei de Ampére Maxwell modificada e a lei de Gauss modificada.

- Para Maxwell tem-se: $\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathrm{E} = \mathrm{J}$; $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, que são respectivamente a lei de Faraday e a lei de Gauss para o magnetismo.

Note que não foi colocada a lei de Farada nem lei de Gauss magnética, pois ela não provém da Lagrangeana, e sim da identidade de Bianchi, uma definição que só depende do tensor dual eletromagnético. Porém, detalhes interessantes podem ser extraídos das duas primeiras equações. Uma coisa que fica clara é a importância do *Background* na criação de uma nova fonte, mesmo sem a presença de ρ ou J. Deve ser observado também a não linearidade das equações de C-F-J, uma vez que o campo magnético e o campo elétrico não podem ser separados, para que assim como nas equações de Maxwell, seja possível a obtenção de soluções estáticas de forma simples. Outra diferença relevante está nas equações de onda:

- Para C-F-J, tem-se: $\Box\mathbf{B} + \mathrm{v}_0(\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathrm{v} \times \mathbf{E})$; $\Box\mathbf{E} + \partial_t(\mathrm{v} \cdot \mathbf{E}) = \nabla(\mathrm{v} \cdot \mathbf{B}) + \mathrm{v}_0\, \partial_t \mathbf{B}$.
- Para Maxwell, tem-se: $\Box\mathbf{B} = 0, \Box\mathbf{E} = 0$.

Note que as equações para C-F-J, não é linear, ou seja, por mais que se tente se v≠0, a equação nunca terá somente um dos campos (E ou B), como ocorre na eletrodinâmica usual. Agora quando comparado a equação de continuidade do teorema de Poynting, observa-se que:

- Para C-F-J, tem-se: $\nabla \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{v}}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\right) - \partial_t \left(\frac{\mathrm{E}^2}{2} + \frac{\mathrm{B}^2}{2} + \frac{\mathrm{v}_0}{2}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right) = 0$.
- Para Maxwell, tem-se: $\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) - \partial_t \left(\frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2}\right) = 0$.

Até mesmo na equação de continuidade nota-se outra implicação teórica do *background* observável, o campo de fundo tem influência direta na densidade de energia (primeiro termo) do campo eletromagnético para o caso de $\mathrm{V}^\beta = (\mathrm{v}_0, 0)$(*background* tipo tempo). O mesmo pode-se observar no vetor de Poynting (segundo termo), onde $\mathrm{V}^\beta = (0, \mathrm{v})$(tipo espaço), contribui também de forma efetiva, adicionando uma componente na direção do *background*, ao vetor $\mathrm{S}_{\mathrm{CFJ}}$.

CONCLUSÃO

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é um cenário teórico no qual as investigações sobre violações das simetrias de Lorentz e CPT são desenvolvidas. Neste ínterim, a identificação de violação da invariância de Lorentz no Modelo Padrão usual representa um sinal (indicio) acerca das características de uma teoria (mais) fundamental, válida na escala de altíssimas energias (escala da GUT). A prescrição de averiguação consiste em agregar termos responsáveis pela violação da invariância de Lorentz nos diferentes setores do Modelo Padrão, prevendo, posteriormente, possíveis alterações nas características de diversos sistemas físicos.

Finalmente, via comparação entre estas previsões e dados experimentais minuciosos, resulta a imposição de limites superiores sobre magnitude dos coeficientes responsáveis pela violação. Os limites assim obtidos sublinham-se, são extremamente rigorosos, uma vez que a invariância de Lorentz figura amplamente (com grande nível de precisão) válida.

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Modelo Padrão Estendido. Aqui, contemplou-se a eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), subproduto do setor de gauge puro do MPE $(k_{\mu\nu\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^{\beta})$, no intuito de verificar qual a influência da violação da simetria de Lorentz em alguns aspectos deste setor. Dando ênfase aos aspectos clássicos (mais presentes no âmbito da Graduação em Física).

Outros aspectos que podem ser explorados em trabalhos futuros, são as soluções clássicas, onde pode-se observar de forma clara a influência do *background* em leis simples como Coulomb e Biot-Savart. Outro ponto importante a ser averiguado no futuro são as relações de dispersão características do modelo, e tal averiguação tem início na análise dos polos do propagador, dessa forma podem-se obter os modos de propagação associados aos polos. Obtidas essas relações de dispersão é possível determinar a estabilidade da teoria, ou seja a possibilidade de a partir do modelo, ser formulado uma teoria quântica de campos efetiva. E para tanto como já foi comentado deve se investigar três aspectos:

- Estabilidade de modos: objetiva a identificação dos modos associados a valores complexos de energia e encontro de algum modo de propagação, com essa característica impossibilitaria à interpretação física dos quanta por eles descritos.

- Causalidade de modos: objetiva estabelecer os modos causais (associados à transmissão de sinais com velocidades inferiores a da luz) e não causais de uma teoria. Como modos não causais, temos os chamados sinais taquionicos ou superluminais, que levam à violação do princípio da causalidade, e tal violação é indesejável, pois impossibilita a elaboração de uma TQC consistente devido ao fato de toda teoria quântica de campos se basearem nos princípios da TRR, que impossibilita que corpos se movam na velocidade da luz (EINSTEIN 1905).
- Unitariedade de modos: está relacionada à norma dos estados definidos no espaço de Hilbert, quando todos os estados exigem norma quadrática positiva, à teoria é dita unitária.

Tal analise é omitida nesse trabalho, pois não foi o produto de interesse dos autores, uma vez que usaria de uma matemática relativamente mais elaborada, o que os autores consideraram inadequado para o presente trabalho, devido a natureza da publicação (ensino de física).

Mas o ponto de destaque do presente trabalho é o fato de os métodos de cálculo realizados não necessitarem dos métodos matemáticos complexos usados na teoria quântica de campos usual, fazendo com que este trabalho possa ser uma maneira alternativa de introduzir novas teorias eletromagnéticas na disciplina eletrodinâmica clássica para os cursos de graduação, e até mesmo em licenciaturas, podendo dar ao graduando em física uma formação ainda mais rica, tendo em vista que esse modelo de eletrodinâmica é uma teoria recente e com varias aplicações em física teórica.

BIBLIOGRAFIA

CAROLL, Sean; FIELD, George; JACKIW, Roman. Limits on a Lorentz and Parity Violating Modication of Electrodynamics. **Physical. Review**, 1990.

CASSANA, Rodolfo, FERREIRA Jr., Manoel, GOMES, Adauto; PINHEIRO, Paulo, RODRIGUES, J.S.. Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the

CMB anisotropy. **Phys.Rev. D**., 2008

CASSANA, Rodolfo; FERREIRA JUNIOR, Manoel; GOMES, Adauto; PINHEIRO, Paulo. Gauge propagator and physical consistency of the CPT-even part of the Standard Model Extension. **Phys.Rev. D**, 2009.

CASSANA, Rodolfo; FERREIRA JUNIOR, Manoel; SANTOS, Carlos. Classical solutions for the Lorentz-violating and CPT-even term of the standard model extension. **Phys. Rev. D**, 2008.

DIRAC, Paul A. M.. Quantised Singularities in the Electromagnetic Field. **Proc. Royal. Soc.**, 1931

EINSTEIN, Albert. ON THE ELECTRODYNAMICS OF MOVING. **Annalen der Physik.**, 1905.

FERREIRA Jr.,Manoel; CASSANA, Rodolfo; Santos, Carlos E. Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics. **Phys. Rev. D**, 2008.

JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. New York, 1999

MAXWELL, J. C. **A treatise on electricity and magnetism**. University of Oxford. 1873

SCARPELLI, Baeta; BELICH, Humberto; BOLDO, José; HELAYEL NETO, José. Aspects of Causality and Unitarity and Comments on Vortex-like Con_gurations in an Abelian Model with a Lorentz-Breaking Term. **Phys. Rev. D**, 2003.