Volume 6
2022

multiverso

Revista Eletrônica do Campus Juiz de Fora

INSTITUTO FEDERAL
SUDESTE DE MINAS GERAIS
Campus
Juiz de Fora

LEI DOS COSSENOS NA RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS*

Gabriela de Freitas Lima[1], João Gabriel Lucio Conceição[2], Artur Afonso Guedes Rossini[3] e Angelo Pereira do Carmo[4]

*Artigo submetido em **12.mar.21** e aceito em **09.set.21.***

[1]gabrieladefreitas2002@gmail.com
[2]joaogabrieljf@outlook.pt,
[3]artur.rossini@ifsudestemg.edu.br,
[4]angelo.carmo@ifsudestemg.edu.br.
IF Sudeste MG - Campus Juiz de Fora

Resumo: O objetivo principal aqui é mostrar condições suficientes nas quais dadas três medidas de um triângulo esférico, entre seus lados e ângulos, as demais três medidas podem ser determinadas. Mais ainda, mostramos que tal determinação pode ser feita em termos da versão esférica da lei dos cossenos, mesmo que duas das medidas conhecidas sejam ângulos, devido à existência do triângulo polar associado.

Palavras-chave: Geometria Esférica; Triângulos Esféricos; Resolução.

INTRODUÇÃO

Os triângulos são figuras muito importantes na geometria euclidiana plana. Não é à toa que um bom livro de geometria gaste boa parte de suas páginas se dedicando a estas figuras planas. Estendendo a importância dos triângulos para além da geometria euclidiana plana, podemos dizer que na geometria esférica essa importância também é verificada.

Dada uma superfície esférica S e dois pontos $A, B \in S$, como podemos calcular a distância entre esses dois pontos? No caso particular da superfície terrestre (considerada uma esfera por aproximação), os avanços nos conhecimentos de geometria em uma superfície esférica permitiram a construção de tecnologias, tais como o GPS (Global Positioning System), com o qual pode-se conhecer esta distância rapidamente. Outra ferramenta tecnológica atual que permite a determinação de distâncias no planeta Terra é o recurso *Google Maps*, disponível em https://www.google.com/maps.

A geometria esférica tem, portanto, aplicações imediatas em nosso cotidiano. Trata-se de uma geometria não-euclidiana, onde por exemplo não existem retas paralelas. Essa geometria ocorre em uma superfície de curvatura constante e positiva, cujo modelo principal é uma superfície esférica. Nesta superfície podemos definir figuras tais como triângulos esféricos, cujo estudo produz conhecimentos técnicos científicos interessantes, inclusive com aplicações práticas.

Numa navegação marítima, por exemplo, os cálculos de rota são baseados em conceitos e ideias da geometria esférica, já que os navios, para fins de estudo, podem ser considerados entes que se movimentam sobre uma superfície esférica. As discussões sobre qual será a melhor rota entre dois portos é uma discussão interessante quando se estuda o movimento de navios. Em geral, as mesmas ideias podem ser levantadas sobre a navegação aérea. Portanto, o bom conhecimento dos triângulos esféricos é importante para compreendermos melhor o comportamento de navios e aeronaves.

Naturalmente, alguns (mas não todos!) resultados estudados tradicionalmente para triângulos euclidianos também são válidos no caso esférico, devendo ser feitas as adaptações necessárias. O principal resultado com o qual trabalharemos aqui é a versão esférica da lei dos cossenos, explorando como ela pode ser utilizada na resolução de triângulos esféricos.

Importante dizer que, a partir daqui, este trabalho fará referência aos triângulos esféricos simplesmente como triângulos, exceto em casos de possível ambiguidade.

MATERIAL E MÉTODOS

Inicialmente, vamos revisar alguns conceitos e ideias que serão fundamentais para que possamos compreender um pouco sobre geometria esférica. Aqui, estaremos preocupados em fornecer o suporte necessário para a boa compreensão do que virá a seguir. Quanto a metodologia, foi feita uma revisão bibliográfica dos conceitos fundamentais, identificando resultados que nos permitam seguir na direção do objetivo central do texto: a resolução de triângulos esféricos através da lei dos cossenos em sua versão esférica.

Assim, nesta seção, vamos elencar resultados já conhecidos da literatura existente e que serão importantes para nos fornecer a sustentação necessária para o bom entendimento do texto. Na seção resultados e discussões, partiremos para as contribuições próprias deste texto.

Definição 1. (*Superfície Esférica*) Dado um número real positivo r e um ponto O no espaço, a superfície esférica S, de centro O e raio r, é o conjunto de pontos do espaço cuja distância à O é exatamente r.

A interseção entre um plano secante e a superfície esférica é sempre uma circunferência, sendo que essa interseção se reduz a um único ponto quando o referido plano é tangente à esfera. Por outro lado, o raio da circunferência de interseção pode valer no máximo r, o raio da esfera, e isto ocorre quando o centro da circunferência de interseção coincide com o centro da esfera.

Definição 2. (*Círculos Máximos*) Dada uma superfície esférica S de raio r e centro O, um círculo máximo em S é a curva gerada pela interseção de S com um plano que contém o centro O.

Note que dada uma superfície esférica S existem infinitos círculos máximos nessa superfície. Dados dois pontos $A, B \in S$ não pertencentes ao mesmo diâmetro, existe apenas um círculo máximo passando por estes pontos. De fato, pela definição 2, o único círculo máximo que contém os pontos A e B é aquele obtido pela interseção entre a superfície S e o plano determinado pelos pontos A, B e O. Como três pontos não colineares determinam um único plano (DOLCE, 1985) decorre que é único o círculo máximo de S que passa por A e B.

Dado o círculo máximo de S que contenha os pontos A e B, formam-se dois arcos de círculos máximos, o arco $\widehat{AB}$ e o arco $\widehat{BA}$, este último sendo o replemento do primeiro. Neste texto, convencionamos que sempre que nos referirmos ao arco de círculo máximo $\widehat{AB}$, os pontos A e B não pertencem ao mesmo diâmetro e estaremos nos reportando ao menor arco de círculo máximo formado pelos pontos A e B. Desta forma, um arco de círculo máximo sempre tem medida menor do que 180º.

Agora estamos em condições de definir um triângulo esférico.

Definição 3. (*Triângulo Esférico*) Seja S uma superfície esférica. Dados três pontos A, B, $C \in S$ não pertencentes ao mesmo círculo máximo, o triângulo esférico ABC é a região de S delimitada pelos três arcos de círculo máximo $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CA}$.

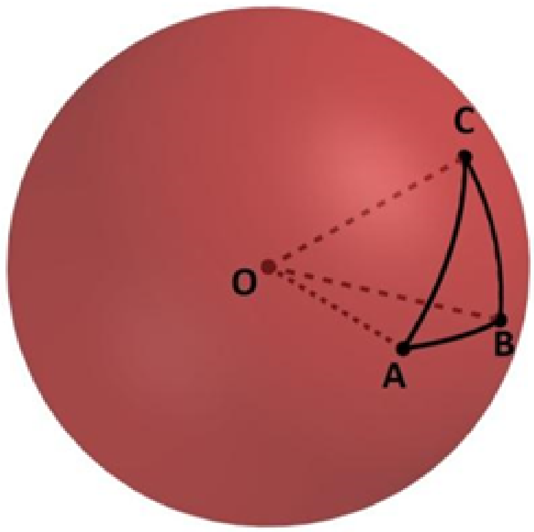

Figura 1
Triângulo Esférico ABC.
***Fonte:** Autores*

Os lados do triângulo esférico ABC são os arcos de círculo máximo $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CA}$ e suas medidas serão indicadas por c, a e b respectivamente. Já os pontos A, B e C serão chamados vértices do triângulo esférico ABC.

A medida do ângulo A do triângulo ABC é definida como o ângulo formado entre as retas tangentes aos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ no ponto A. Observe que este ângulo coincide com o ângulo diedro entre os planos π_{OAB} (plano que contém os pontos A, B e O) e π_{OAC} (plano que contém os pontos A, C e O). As medidas dos ângulos B e C do triângulo são definidas de modo análogo.

Naturalmente associado ao triângulo esférico ABC existe o triedro $O\vec{A}\vec{B}\vec{C}$. As medidas euclidianas dos arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CA}$ são diretamente proporcionais aos ângulos triedros $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}A$, respectivamente, sendo o raio (r) da superfície esférica, o fator de proporcionalidade. Assim a medida dos lados do triângulo é definida como sendo a medida do ângulo triedro correspondente. Portanto, as medidas dos lados de um triângulo esférico variam entre 0º e 180º.

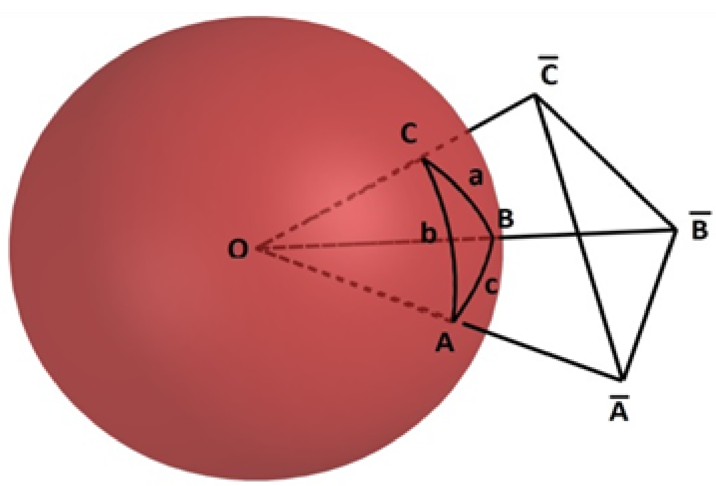

Figura 2
Triângulo esférico e o triedro associado.
***Fonte:** Autores*

As medidas dos lados do triângulo esférico, ao serem dadas pelas medidas dos ângulos triedros, gozam das seguintes propriedades:

Proposição 4. (*Desigualdade triangular*) Se a, b, c são medidas dos lados de um triângulo esférico, então valem as desigualdades:

$$(i)\ a + b > c \qquad (ii)\ a + c > b \qquad (iii)\ b + c > a\,.$$

Demonstração. DOLCE (2013), Teorema 91, página 99. □

Proposição 5. (*Soma dos lados*) Se a, b, c são medidas dos lados de um triângulo esférico, então $0^o < a + b + c < 360^o$.

Demonstração. DOLCE (2013), Teorema 93, página 100. □

Definição 6. (*Pólo de um círculo máximo*) Dado um círculo máximo $C \subset S$, os pólos de C são as extremidades do diâmetro de S que é perpendicular ao plano que contém C.

Dado um triângulo esférico ABC, o círculo máximo que contém o arco $\widehat{AB}$ divide a esfera em dois hemisférios, um dos quais contém inteiramente o triângulo ABC. Seja C' o pólo desse círculo máximo pertencente ao hemisfério contendo o triângulo.

De forma semelhante, o círculo máximo que contém o arco $\widehat{AC}$ divide a esfera em dois hemisférios e um deles contém o triângulo ABC. Denotamos por B' o pólo desse círculo máximo pertencente ao hemisfério contendo o triângulo. Analogamente denotamos por A' o pólo do círculo máximo por B e C que se encontra no mesmo hemisfério (em relação ao círculo por B e C) do triângulo.

Definição 7. (*Triângulo Polar*) Dado o triângulo esférico ABC, o triângulo polar associado a ele é o triângulo de vértices nos pólos A', B', C'. As medidas dos lados do triângulo $A'B'C'$ serão denotadas por $A'B' = c'$, $A'C' = b'$ e $B'C' = a'$.

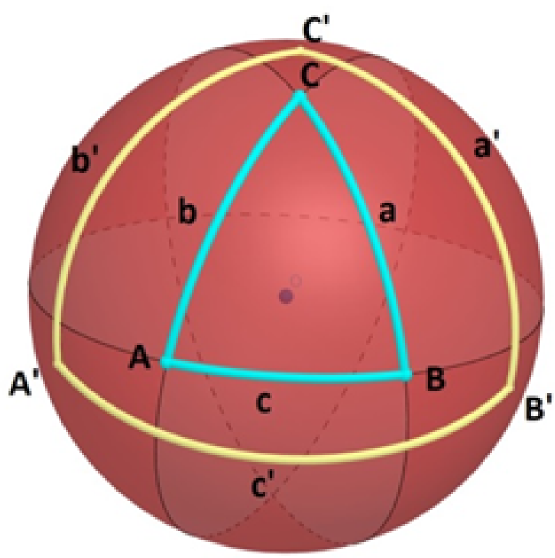

Figura 3
Triângulo esférico ABC e seu polar associado $A'B'C'$
Fonte: *Autores*

O triângulo polar associado a um triângulo esférico ABC carrega informações importantes a respeito do triângulo original, o que será muito útil adiante. Particularmente, as proposições 8 e 9 a seguir trabalhadas em conjunto formam uma poderosa ferramenta na resolução de triângulos.

Proposição 8. Se $A'B'C'$ é o triângulo polar associado ao triângulo esférico ABC, então ABC é o triângulo polar associado ao triângulo esférico $A'B'C'$.

Demonstração. COUTINHO (2015), Teorema 5, página 41. □

Proposição 9. Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos polares entre si, onde a, b, c são as medidas dos lados de ABC e a', b',c' são as medidas dos lados correspondentes de $A'B'C'$, de acordo com a definição 7. Valem as relações

$$A + a' = 180^o,\ B + b' = 180^o \text{ e } \ C + c' = 180^o.$$

Assim como também são válidas as relações recíprocas,

$$A' + a = 180^o,\ B' + b = 180^o \text{ e } C' + c = 180^o.$$

Demonstração. COUTINHO (2015), Teorema 6, página 41 . □

Essencialmente, a Proposição 9 nos fornece medidas de lados do triângulo polar $A'B'C'$ ao se conhecer ângulos de um triângulo ABC, enquanto a Proposição 8 nos permite trabalhar as informações de um triângulo em seu polar e depois retornar ao triângulo original trazendo os resultados obtidos. Por exemplo, podemos ver que nenhum triângulo esférico possui um ângulo maior ou igual a 180º. De fato, se $A \geq 180^o$, então $a' \leq 0^o$ (pois $A + a' = 180^o$), uma contradição.

Também podemos mostrar resultados equivalentes às proposições 4 e 5.

Proposição 10. (*Desigualdade angular*) No triângulo ABC valem as desigualdades

$$(i)\ 180^o + C > A + B \qquad (ii)\ 180^o + B > A + C \qquad (iii)\ 180^o + A > B + C.$$

Demonstração. (i) Sejam a, b, c as medidas dos lados do triângulo esférico ABC. Considerando o triângulo polar associado $A'B'C'$ com lados de medidas a',b',c' temos, pela proposição 4 (i), que $a' + b' > c'$. Aplicando agora a proposição 9, conseguimos que,

$$(180^o - A) + (180^o - B) > (180^o - C).$$

Ou seja,

$$180^o + C > A + B.$$

Análogo para as demais. □

Proposição 11. (*Soma dos ângulos*) No triângulo ABC temos

$180^o < A + B + C < 540^o.$

Demonstração. Considere o triângulo esférico ABC de lados de medida a, b, c e seja $A'B'C'$ o seu triângulo polar associado, com lados medindo a', b', c'. Da proposição 5, temos que,

$$0^o < a' + b' + c' < 360^o.$$

Aplicando a proposição 9, conseguimos

$$0^o < (180^o - A) + (180^o - B) + (180^o - C) < 360^o.$$

De onde segue que $180^o < A + B + C < 540^o$. □

A lei trigonométrica fundamental aqui é a versão esférica da conhecida lei dos cossenos. Em associação com a construção do triângulo polar, é a ferramenta que auxilia na determinação de todas as medidas de um triângulo, conhecendo-se apenas três delas.

Proposição 12. (*Lei dos Cossenos*) Dado um triângulo esférico ABC com lados de medidas a, b e c vale a relação

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A). \qquad (LC)$$

Demonstração. COUTINHO (2015), página 52. □

Estamos agora com as ferramentas prontas para serem utilizadas em nosso foco principal, que é a resolução de triângulos esféricos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, compartilhamos as contribuições próprias deste trabalho à geometria esférica, em particular, as contribuições à resolução de triângulos esféricos.

Um triângulo fica completamente determinado quando se conhece as medidas de seus ângulos A, B, C e as medidas dos seus lados a, b, c. Resolver um triângulo significa, dadas algumas medidas de lados e ângulos, determinar as medidas restantes. Vamos trabalhar nesta seção com o caso em que são dadas três destas medidas, buscando determinar condições suficientes para que as demais sejam encontradas com base na Lei dos Cossenos (LC).

Trabalho nesta linha de resolução para triângulos euclidianos pode ser visto, por exemplo, em LIMA (2006). Lá, é inevitável a utilização da lei dos senos em alguns casos, assim como o caso em que são dados três ângulos não apresenta resolução única. Esses problemas podem ser contornados para triângulos esféricos graças à existência do triângulo polar associado.

Inicialmente, observamos que existem 20 maneiras de se informar três destas medidas, que podem ser alocadas em seis grupos de acordo com a disposição geométrica em que os três dados são informados.

Caso 1: LLL (Lado-Lado-Lado). Quando os três elementos informados são os lados a,b e c.

Caso 2: AAA (ngulo- ngulo- ngulo). Quando os três elementos informados são os ângulos A, B e C.

Caso 3: LAL (Lado- ngulo-Lado). Quando são informados dois lados e o ângulo entre eles.

Caso 4: ALA (ngulo-Lado- ngulo). Quando são informados dois ângulos e o lado compreendido entre eles.

Caso 5: LLA (Lado-Lado- ngulo). Quando são dados dois lados e o ângulo oposto a um destes lados.

Caso 6: AAL (ngulo- ngulo-Lado). Quando são dados dois ângulos e o lado oposto a um destes dois ângulos.

Obviamente, dentro de cada um dos casos mencionados acima o método de resolução do triângulo seguirá os mesmos passos, como, por exemplo, se forem dados os lados a, b e o ângulo C ou se forem dados os lados a, c e o ângulo B, já que a geometria é a mesma (caso LAL), veja a figura 4.

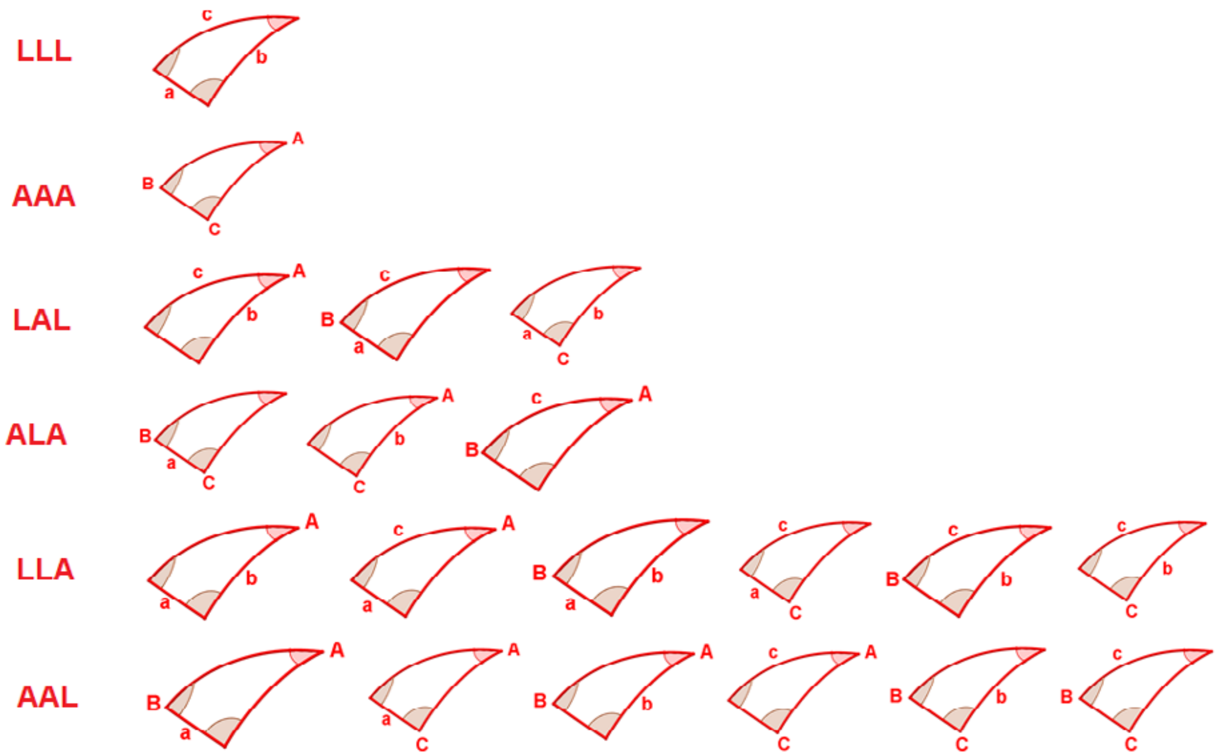

Figura 4
Os seis casos distintos de resolução de triângulos esféricos
Fonte: *Autores*

Os casos 1 e 2 são duais entre si, no seguinte sentido: de posse do conhecimento dos três ângulos A, B, C (caso AAA), passando ao triângulo polar temos o conhecimento das três medidas dos lados a', b' e c', em vista da proposição 9, e sabendo resolver o caso LLL determina-se os três ângulos A', B' e C'. Novamente utilizando a proposição 9 em conjunto agora com a proposição 8 conseguimos a determinação dos lados a, b e c do triângulo original.

Da mesma maneira, os casos 4 e 6 são duais respectivamente aos casos 3 e 5, de modo que podemos nos concentrar na resolução dos casos 1, 3 e 5.

Toda medida presente daqui em diante (a, b, c, A, B, C), estaremos considerando que é positiva e menor que 180º.

Em vista das proposições 4 e 5, para que três números a,b e c possam ser medidas dos lados de um triângulo é uma condição necessária que a,b e c satisfaçam as propriedades

$$(i)\ \ a + b > c \qquad (ii)\ a + c > b \qquad (iii)\ b + c > a \qquad (DT)$$

$$0^o < a + b + c < 360^o \qquad (SL)$$

Lema 13. Dadas as medidas a, b, c satisfazendo às condições (DT) e (SL), valem as desigualdades:

$$(1)\ \cos(a) > \cos(b + c) \qquad (2)\ \cos(b) > \cos(a + c) \qquad (3)\ \cos(c) > \cos(a + b).$$

Demonstração. Da condição (DT) (iii) ($b + c > a$), se $b + c \leq 180^o$ então $cos(a) > cos(b + c)$ diretamente do fato $f(x) = cos(x)$ ser decrescente no intervalo $[0, \pi]$.

Por outro lado, se $b + c = 180^o + \varepsilon$, com $0 < \varepsilon < 180^o$ então pela condição (SL) podemos escrever

$$a + 180^o + \varepsilon < 360^o \quad \therefore a < 180^o - \varepsilon.$$

Como $0 < 180^o - \varepsilon < 180^o$ conseguimos

$$cos(a) > cos(180^o - \varepsilon) = cos(180^o + \varepsilon) = cos(b + c).$$

Semelhante para as demais desigualdades. □

Passaremos agora à resolução de cada caso separadamente.

Proposição 14 (***Caso 1 – LLL***). Dadas medidas a, b, c, as relações (DT) e (SL) são condições necessárias e suficientes para a resolução de um triângulo com essas medidas de lados.

Demonstração. As proposições 4 e 5 mostram que as referidas condições são necessárias. Agora, dados os lados a, b, c que as satisfazem, queremos encontrar ângulos A, B, C para um triângulo com os lados de medidas dadas.

Pela Lei dos Cossenos (LC):

$$cos(a) = cos(b) \,.\, cos(c) + sen(b).sen(c).cos(A)$$

ou seja,

$$cos(A) = \frac{cos(a) - cos(b) \cdot cos(c)}{sen(b) \cdot sen(c)} \qquad (1)$$

Nos resta agora mostrar que existe um único ângulo A tal que a expressão (1) seja verificada.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $b \geq c$, isto é, $0^o \leq b - c < 180^o$. Pela condição (DT) (ii) temos $0^o \leq b - c < a < 180^o$, e como $f(x) = cos(x)$ é uma função decrescente no intervalo $[0,\pi]$ conseguimos que

$$cos(a) < cos(b-c) = cos(b) \,.\, cos(c) + sen(b) \,.\, sen(c)$$

ou seja, que

$$\frac{cos(a) - cos(b) \cdot cos(c)}{sen(b) \cdot sen(c)} < 1. \qquad (2)$$

Pelo lema 13, temos $cos(b+c) < cos(a)$, ou seja,

$$cos(b) \cdot cos(c) - sen(b) \cdot sen(c) < cos(a)$$

logo,

$$-1 < \frac{cos(a) - cos(b) \cdot cos(c)}{sen(b) \cdot sen(c)} \qquad (3)$$

As desigualdades (2) e (3) mostram que existe um único ângulo $0 < A < 180^o$. Da mesma maneira, podemos mostrar que encontra-se ângulos únicos B e C, resolvendo o triângulo. □

As proposições 10 e 11 mostram que, de maneira equivalente às propriedades DT e SL, dados três números A, B e C é condição necessária para a existência de um triângulo com ângulos A, B e C que sejam satisfeitas as propriedades:

$$(1)\ 180^o + C > A + B \qquad (2)\ 180^o + B > A + C \qquad (3)\ 180^o + A > B + C \qquad (DA)$$

$$180^o < A + B + C < 540^o \qquad (SA)$$

Proposição 15 (***Caso 2 – AAA***). Dados números A, B, C, as relações (DA) e (SA) são condições necessárias e suficientes para a resolução de um triângulo com esses ângulos.

Demonstração. As proposições 10 e 11 mostram que as referidas condições são necessárias.

Por outro lado, sejam dados ângulos A, B, C satisfazendo (DA) e (SA). Pela proposição 9 obtemos os lados a', b' e c' que satisfazem as condições (DT) e (SL). Portanto, podemos aplicar a proposição 14 e determinar A', B' e C'. Agora, usando novamente a proposição 9 e a proposição 8, determinamos a, b e c.

Proposição 16 (***Caso 3 – LAL***). Dadas duas medidas para lados e a medida do ângulo compreendido por eles, existe um único triângulo com essas medidas.

Demonstração. Suponha dados os lados b e c e o ângulo A, com $b \geq c$. Para determinarmos o lado a, oposto ao ângulo dado, basta utilizar a lei dos cossenos (LC).

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A).$$

Como $-1 < cos(A) < 1$ e $sen(b) \cdot sen(c) > 0$ (já que $0^o < c \leq b < 180^o$) temos que

$$-sen(b) \cdot sen(c) < sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A) < sen(b) \cdot sen(c)$$

e somando $cos(b) \cdot cos(c)$ obtemos

$$\begin{aligned} cos(b) \cdot cos(c) - sen(b) \cdot sen(c) &< cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A) \\ &< cos(b) \cdot cos(c) + sen\,(b) \cdot sen(c) \end{aligned}$$

isto significa que,

$$-1 \leq cos(b + c) < cos(a) < cos(b - c) \leq 1 \qquad (4)$$

e consequentemente determina-se único lado de medida $0^o < a < 180^o$.

Como $b \geq c$ segue que $a + b > c$. Além disso, a desigualdade em (4), $cos(a) < cos(b - c)$, implica que $a > b - c$ (pois a função cosseno é decrescente no intervalo $[0,\pi]$), ou seja, $a + c > b$.

Quanto à soma $b + c$ temos duas possibilidades:

- Se $b + c \leq 180^o$ então $a + b + c < 180^o + 180^o = 360^o$ e portanto a condição (SL) é satisfeita. Mais ainda, da desigualdade em (4), $cos(b + c) < cos(a)$, conseguimos que $b + c > a$ em decorrência do decrescimento de $f(x) = cos(x)$ no intervalo $[0, \pi]$. Portanto, a condição (DT) também é satisfeita.
- Se $b + c = 180^o + \varepsilon$, com $0 < \varepsilon < 180^o$, então é imediato que $b + c > a$, e portanto a condição (DT) está satisfeita. Também, pela desigualdade em (4),

$cos(a) > cos(b + c) = cos(180^o + \varepsilon) = cos(180^o - \varepsilon)$

e dessa forma $a < 180^o - \varepsilon$, de onde conseguimos,

$a + b + c < 180^o - \varepsilon + 180^o - \varepsilon = 360^o$

resultando que a condição (SL) também está satisfeita.

Portanto, em qualquer caso, a medida a encontrada, junto às medidas b,c inicialmente fornecidas atendem às condições (DT) e (SL), de modo que podemos aplicar a proposição 14 para encontrar os ângulos B e C, resolvendo o triângulo.

Proposição 17 (***Caso 4 – ALA***). Dadas duas medidas para ângulos e a medida do lado compreendido entre eles, existe um único triângulo com essas medidas

Demonstração. Este é o caso dual à proposição 16. Dadas as medidas A, B e o lado c, passando-se ao triângulo polar conseguimos através da proposição 9 as medidas a', b' e C'. Aplicando a proposição 16 podemos encontrar as medidas A', B' e c', e o novo uso da proposição 9, juntamente com a proposição 8, nos dá as medidas a, b e C do triângulo original. □

Vamos nos concentrar, agora, no caso em que são dados os lados a, b e o ângulo A, oposto ao lado a. Inicialmente vamos explorar o caso mais simples em que o ângulo A é reto ($A = 90^o$).

Caso 5' - LLA$_R$ (***Lado - Lado - Ângulo Reto***)

Sendo $A= 90^o$, a lei dos cossenos (LC) aplicada a este triângulo se simplifica à versão esférica do *Teorema de Pitágoras*

$$cos(a)=cos(b) \cdot cos(c). \qquad \text{(TP)}$$

Existem três situações a considerar, de acordo com a relação de ordem entre as medidas dos lados dados a e b:

- $b < a;$
- $b > a;$
- $b = a.$

Proposição 18 (***Caso LLA$_R$ com b < a***) Dados $A=90^o$ e a, b tais que $0 < b < a$, existe triângulo com essas medidas se, e somente se, $a+b<180^o$.

Demonstração. Seja dado um triângulo retângulo esférico em que $A = 90^o$ e $b < a$. Veja que neste caso $b \neq 90^o$ pois senão pelo Teorema de Pitágoras (TP) seria $a = 90^o$, o que não é o caso pois $b < a$.

Também não pode ser $b > 90^o$ pois aí seria $cos(a) < cos(b) < 0$, resultando por (TP) que $cos(c) = \frac{cos(a)}{cos(b)} > 1$.

Portanto, se deve ter $b < 90^o$, de onde $cos(b) > 0$ e então $\frac{cos(a)}{cos(b)} < 1$ (já que $a > b$ implica em $cos(a) < cos(b)$). Finalmente, para que seja $\frac{cos(a)}{cos(b)} > -1$ deve-se ter $cos(a) > -cos(b) = cos(180^o - b)$ ou seja, é necessário que $a < 180^o - b$, isto é, que $a + b < 180^o$.

Agora, considere dados $A=90^o$ e b<a com $a + b < 180^o$.

Neste caso, $b < 90^o$ e $cos(a) < cos(b)$. Também, $a < 180^o - b$, ou seja,

$$cos(a) > cos(180^o - b) = -cos(b).$$

Resulta assim que $-cos(b) < cos(a) < cos(b)$, e dividindo por cosb temos do Teorema de Pitágoras (TP) que $-1 < cos(c) = \frac{cos(a)}{cos(b)} < 1$. Encontramos o (único) lado $0 < c < 180^o$.

Sendo $b + a < 180^o$ e $c < 180^o$, é imediato que $a + b + c < 360^o$, ou seja, a condição (SL) é satisfeita pelas medidas a, b, c.

Como $b < a$ vale sempre que $a + c > b$. Para verificar que a condição (DT) é satisfeita, temos duas possibilidades:

- Se $a \leq 90^o$, então $cos(c) = \frac{cos(a)}{cos(b)} \geq cos(a) \geq 0$ e temos $c \leq a \leq 90^o$, de onde resulta a desigualdade $a + b > c$. Também,

  $cos(b + c) = cos(b) \cdot cos(c) - sen(b) \cdot sen(c) < cos(b) \cdot cos(c) = cos(a)$,

  ou seja, $b + c > a$, pois como $b < 90^o$ e $c \leq 90^o$ a soma $b + c$ é menor do que 180º.

- Se $a > 90^o$ então $cos(a) < 0$, de onde segue que $cos(c) = \frac{cos(a)}{cos(b)} \leq cos(a) < 0$ e temos $c > a$, resultando a desigualdade $b + c > a$. Também,

  $cos(c - b) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) > cos(b) \cdot cos(c) = cos(a)$,

  já que $sen(b) \cdot sen(c) > 0$. Então $c - b < a$, isto é, $a + b > c$.

Em qualquer caso, conseguimos que as medidas a, b, c satisfazem também a condição (DT), e podemos aplicar a proposição 14 para encontrar os demais ângulos B e C, ficando assim o triângulo resolvido e mostrando que a condição $a + b < 180^o$ é suficiente. □

Proposição 19 (***Caso LLAR com b > a)***. Dados $A=90^o$ e a, b tais que $0 < a < b$, existe triângulo com essas medidas se, e somente se, $a + b > 180^o$.

Demonstração. Seja dado um triângulo retângulo esférico em que $A = 90^o$ e $b > a$. Veja que neste caso $b \neq 90^o$ pois senão pelo Teorema de Pitágoras (TP) seria $a = 90^o$, o que não é o caso pois $b > a$.

Também não pode ser $b < 90^o$ pois aí seria $0 < cos(b) < cos(a)$, resultando por (TP) que $cos(c) = \frac{cos(a)}{cos(b)} > 1$.

Portanto, devemos ter $b > 90^o$. Para que seja $\frac{cos(a)}{cos(b)} > -1$, multiplicando por $cos(b) < 0$ conseguimos $cos(a) < -cos(b) = cos(180^o - b)$ ou seja, é necessário que $a > 180^o - b$, isto é, que $a + b > 180^o$.

Agora, considere dados $A = 90^o$ e $b > a$, com $a + b > 180^o$. Temos obrigatoriamente $b > 90^o$, ou seja $cos(b) < 0$. Além disso, $cos(a) > cos(b)$ e assim $cos(c) = \frac{cos(a)}{cos(b)} < 1$.

De $a + b > 180^o$ segue que $a > 180^o - b$, isto é, $cos(a) < cos(180^o - b)$. Sendo $cos(b) < 0$ e $cos(180^o - b) = - cos(b)$, ficamos com $\frac{cos(a)}{cos(b)} > -1$.

Conseguimos, portanto, que $-1 < cos(c) < 1$, ou seja, podemos determinar (único) $0 < c < 180^o$.

Agora vamos mostrar que as condições (DT) e (SL) são satisfeitas pelas medidas a, b, c. Para isto, seja $\varepsilon > 0$ com $a + b = 180^o + \varepsilon$. Vale a igualdade,

$$cos(180^o - \varepsilon) = cos(180^o + \varepsilon) = cos(a+b) = cos(a) \cdot cos(b) - sen(a) \cdot sen(b),$$

e dividindo a expressão acima por $cos^2(b) > 0$ temos que,

$$\frac{cos(180-\varepsilon)}{cos^2(b)} = \frac{cos(a)}{cos(b)} - \frac{sen(a)\cdot sen(b)}{cos^2(b)} < \frac{\cos(a)}{\cos(b)} = \cos(c).$$

Ora, como $0 < cos^2(b) < 1$ vemos que,

$$cos(180^o - \varepsilon) < \frac{cos(180^o - \varepsilon)}{cos^2(b)} < cos(c)$$

e como $f(x) = cos(x)$ é decrescente no intervalo $[0,\pi]$ concluímos que $c < 180^o - \varepsilon$.

Assim, $a + b + c < (180^o + \varepsilon) + (180^o - \varepsilon) = 360^o$ e portanto a condição (SL) é satisfeita.

Sendo $b > a$ é imediato que $b + c > a$. Além disso, se for $b \geq c$ então segue que $a + b > c$, e como $cos(a) = cos(b) \cdot cos(c)$ e $sen(b) \cdot sen(c)>0$, escrevemos que

$$cos(b - c) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) > cos(a)$$

logo conseguimos que $a > b - c$, ou seja, $a + c > b$.

De maneira similar, na situação em que $c > b$ conseguimos diretamente que $a + c > b$ e que $cos(c - b) > cos(a)$, que resulta em $a + b > c$.

Em todo caso, a condição (DT) é satisfeita por a,b,c e podemos aplicar a proposição 14 para resolver o triângulo, mostrando que $a + b >180^o$ é condição suficiente. □

Proposição 20 (***Caso LLAR com b = a***). Dados $A = 90^o$ e $a = b$, existe triângulo com essas medidas se, e somente se, $a = b = 90^o$. Mais ainda, nesse caso existe uma única solução para cada número $0 < c < 180^o$, sendo esta solução dada por $a = b = A = B = 90^o, C = c$.

Demonstração. A aplicação da lei dos cossenos (LC) utilizando $b = a$ resulta em

$$cos(a) = cos(a) \,.\, cos(c) \qquad \therefore cos(a) = 0 \text{ ou } cos(c) = 1. \tag{5}$$

Ora, se $cos(c) = 1$ então $c = 0^o$, um absurdo. Assim, a solução (5) se reduz a $cos(a) = 0$, isto é, $a = b = 90^o$ é condição necessária no caso $a = b$.

Consideremos agora $A=90^o$ e $a = b = 90^o$. O Teorema de Pitágoras (TP) se reescreve neste caso como $0 = 0 \cdot cos(c)$, o que é satisfeito por qualquer valor de c, com $0 < c < 180^o$.

Tomando-se um valor para c, com $0^o < c < 180^o$, temos $a + b + c < 360^o$, já que $a = b = 90^o$, ou seja, a condição (SL) é satisfeita para os lados a, b, c.

Mais ainda, temos que a $+ b = 180^o > c, a + c > b$ e $b + c > a$, sendo também satisfeita a condição (DT). Pela proposição 14, o triângulo pode ser resolvido, isto para cada valor de c fixado.

Trata-se dessa forma de um caso em que o triângulo pode ser resolvido, mas não determinado, já que apresenta uma solução para cada valor $c \in [0,\pi]$.

Aplicando a lei dos cossenos (LC) ao ângulo B,

$$cos(b) = cos(a) \cdot cos(c) + sen(a) \cdot sen(c) \cdot cos(B),$$

e como $a = b = 90^o$ conseguimos $0 = 0 + sen(a) \cdot sen(c) \cdot cos(B)$. Por ser $sen(a) \,.\, sen(c)>0$ resulta que $cos(B) = 0$, isto é, $B = 90^o$.

Também podemos aplicar (LC) ao ângulo C, obtendo

$$cos(c) = cos(a) \cdot cos(b) + sen(a) \cdot sen(b) \cdot cos(C),$$

igualdade que se simplifica a $cos(c) = cos(C)$, ou seja, $c = C$. Estão descritas assim todas as soluções neste caso.

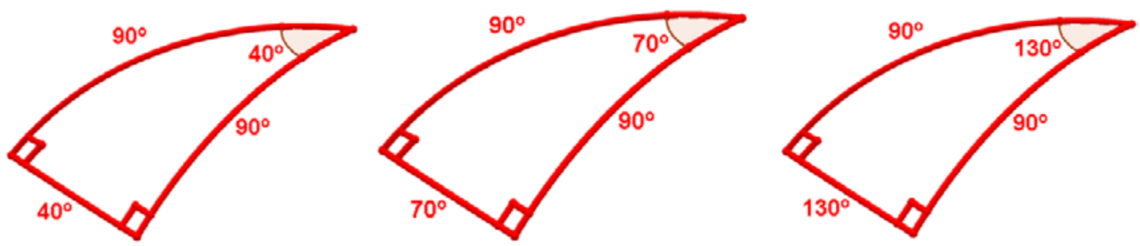

Figura 5
Três soluções particulares para $a = b = A = 90^o$.
Fonte: *Autores*

Resolvemos assim o caso **LLA$_R$**. Vamos agora para o caso mais geral.

Caso 5 - LLA

Sejam dados os lados a, b e o ângulo A, oposto ao lado a. A estratégia aqui é encontrar a medida do lado c para recair no caso 1.

Pela lei dos cossenos (LC),

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(A). \qquad (6)$$

Por simplicidade, escreveremos $cos(a) = P$, $cos(b) = M$ e $sen(b) \cdot cos(A) = N$, de modo que a equação (6) se reescreve como

$$M \cdot cos(c) + N \cdot sen(c) = P, \qquad (7)$$

onde M, N, P são números reais conhecidos. Esse tipo de equação em seno e cosseno é trabalhado em CARMO (2005), página 82, onde são expostos alguns métodos de solução.

Tomando o quadrado de ambos os membros em (7),

$$M^2 \cdot cos^2(c)+2 \cdot M \cdot N \cdot sen(c) \cdot cos(c)+N^2 \cdot sen^2(c)=P^2 \qquad (8)$$

A relação fundamental $sen^2(c) = 1 - cos^2(c)$ e a igualdade

$$N \cdot sen(c) = P - M \cdot cos(c)$$

quando utilizadas em (8) nos dão

$$(M^2 + N^2) \cdot cos^2(c) - 2MP \cdot cos(c)+(P^2-N^2)= 0, \qquad (9)$$

que é uma equação quadrática em $cos(c)$. Seu discriminante é

$$\Delta=4N^2 \cdot (M^2+N^2-P^2).$$

Portanto, a equação (7) pode apresentar até duas soluções, desde que $M^2+N^2 - P^2 > 0$, isto é, que

$$cos^2(b) + sen^2(b) \cdot cos^2(A) - cos^2(a) > 0,$$

inequação que, pela relação fundamental $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$ com $x = a$ e $x = b$, é equivalente a

$$sen(a) > sen(b) \cdot sen(A).$$

Observação. Caso for $M^2 + N^2 = 0$ teremos

$$cos^2(b) + sen^2(b) \cdot cos^2(A) = 0.$$

Sendo a soma de dois números reais não negativos, segue que $cos(b) = 0$ e $sen(b) \cdot cos(A) = 0$, de onde vem que $M^2 + N^2 = 0$ se e só se $a = b = 90^o$, caso já explorado anteriormente. Podemos então assumir agora que $M^2 + N^2 \neq 0$ e assim (9) é realmente uma equação quadrática.

Conseguimos os primeiros critérios para o estudo do caso LLA:

- ($\Delta < 0$) Dados a, b, A com $sen(a) < sen(b) \cdot sen(A)$, não existe um triângulo esférico com essas medidas.
- ($\Delta = 0$) Dados a, b, A com $sen(a) = sen(b) \cdot sen(A)$, a equação (9) possui uma única solução, a qual é dada por

$$\cos(c) = \frac{MP}{M^2+N^2} = \frac{cos(a) \cdot cos(b)}{cos^2(a)} = \frac{cos(b)}{cos(a)}, \qquad (10)$$

já que neste caso,

$$M^2 + N^2 = cos^2(b) + sen^2(b) \cdot cos^2(A) = cos^2(b) + sen^2(b) - sen^2(b) \cdot sen^2(A) =$$

$$= 1 - sen^2(a) = cos2(a).$$

A solução (10) se escreve como $cos(b) = cos(a) \cdot cos(c)$, a qual é o Teorema de Pitágoras (TP), revelando que $B = 90^o$. Portanto, esta solução recai no caso já estudado LLA_R, para medidas a, b e $B = 90^o$ (veja que dessa forma as medidas a e b tem papéis trocados naquela análise).

De fato, se $sen(A) = 1$ então também vale $A = 90^o$ e (TP) pode ser escrito em relação aos ângulos A e B,

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c)$$

$$cos(b) = cos(a) \cdot cos(c)$$

Juntando as duas igualdades acima, $cos(a) = cos(a) \cdot cos^2(c)$. Como $0^o < c < 180^o$ não pode ser $cos^2(c) = 1$, de onde a solução é $cos(a) = 0$, ou seja, $a = 90^o$. De maneira similar, $b = 90^o$. Estamos portanto no caso LLA_R onde $b = a = 90^o$ e $B = 90^o$.

Se $sen(A) \neq 1$ então a igualdade $sen(a) = sen(b) \cdot sen(A)$ gera a desigualdade $sen(a) < sen(b)$. Temos aqui duas possibilidades: $a < b < 180^o - a$ (caso LLA_R com $B = 90^o$, $a < b$ e $a + b < 180^o$) ou $180^o - a < b < a$ (caso LLA_R com $B = 90^o$, $a > b$ e $a + b > 180^o$), atendendo de qualquer forma aos critérios do caso LLA_R.

- ($\Delta > 0$) Dados a, b, A com $sen(a) > sen(b) \cdot sen(A)$, a medida do lado c pode ser encontrada resolvendo a equação (9).

$$\cos(c) = \frac{M \cdot P \pm |N| \cdot \sqrt{M^2 + N^2 - P^2}}{M^2 + N^2},$$

Isto é,

$$\cos(c) = \frac{cos(a)\cdot cos(b) \pm sen(b)\cdot |cos(A)|\cdot \sqrt{sen^2(a) - sen^2(b)\cdot sen^2(A)}}{1 - sen^2(b)\cdot sen^2(A)}.$$

A princípio surge a possibilidade de haver duas soluções, entretanto o processo de tomar quadrados em (7) pode produzir soluções falsas.

Através de experimento numérico computacional, observamos que a identificação do número real de soluções da equação (9) aparenta ser obtido via alguns parâmetros. Estes estão descritos na conjectura abaixo.

Conjectura 21. Dados a, b, A com $sen(a) > sen(b) \cdot sen(A)$, sejam

$$\mu = min\{b, 180^o - b\} \qquad \upsilon = máx\{b, 180^o - b\} \quad \text{e}$$

$$0 < t < 90^o \text{ tal que } sen(t) = sen(b)\cdot sen(A)$$

A equação (9):

Para $A < 90^o$:	Para A>90º:
$t < a < \mu \rightarrow$ possui duas soluções	$t \leq a \leq \mu \rightarrow$ não possui solução
$\mu \leq a < \upsilon \rightarrow$ possui uma solução	$\mu < a \leq \upsilon \rightarrow$ possui uma solução
$\upsilon \leq a \leq (180^o - t) \rightarrow$ não possui solução	$\upsilon < a < (180^o - t) \rightarrow$ possui duas soluções

Caso 6 – AAL

Dados os ângulos A, B e o lado a, oposto ao ângulo A, a passagem ao triângulo polar provoca a redução ao caso 5, sendo que a condição necessária, devido à proposição 9 se reescreve como

$$sen(180^o - A) \geq sen(180^o - B)\cdot sen(180^o - a),$$

Isto é,

$$sen(A) \geq sen(B)\cdot sen(a),$$

pois, $sen(180^o - x) = sen(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Deste modo, encerramos o estudo caso-a-caso de resolução de triângulos esféricos, provando o teorema enunciado abaixo.

Teorema 22. Dadas três medidas entre 0º e 180º de um triângulo esférico ABC, as demais três medidas podem ser encontradas utilizando a lei dos cossenos, satisfeitas as condições suficientes descritas caso-a-caso.

Comentário (sobre a Lei dos Senos)

Naturalmente, a conhecida lei dos senos também possui sua versão esférica. Sua demonstração pode ser encontrada na dissertação de SILVA (2017).

Proposição 23. (*Lei dos Senos*) Em um triângulo esférico ABC valem as igualdades

$$\frac{sen(A)}{sen(a)} = \frac{sen(B)}{sen(b)} = \frac{sen(C)}{sen(c)}. \qquad \text{(LS)}$$

A lei dos senos pode também ser utilizada na resolução de triângulos, ainda que possa provocar mais cuidados, uma vez que a função seno não é injetora no intervalo $(0,\pi)$, ao contrário da função cosseno.

Entretanto, o uso da lei dos senos pode simplificar em muito vários procedimentos. Como exemplo, provamos aqui o seguinte resultado.

Proposição 24. Na resolução do caso LLA, dados a, b, A suponhamos o caso em que existem duas soluções. Se B1 e B2 são ângulos distintos obtidos em cada solução, então B1+B2=180o.

Demonstração. Este resultado é uma consequência simples da Lei dos Senos (LS), pois

$$sen(B) = \frac{sen(A) \cdot sen(b)}{sen(a)},$$

que é um número positivo menor do que 1, pois estamos supondo duas soluções, e sendo assim temos $sen(a) > sen(b) \cdot sen(A)$. Portanto, as duas soluções B_1 e B_2 possuem o mesmo seno, de onde decorre que são suplementares.

CONCLUSÃO

O estudo da geometria esférica se torna útil na medida em que os conhecimentos adquiridos podem nos auxiliar na compreensão do mundo em que vivemos. O conhecimento da resolução de triângulos nesta geometria não-euclidiana, assim como na geometria euclidiana plana, é de fundamental importância em diversos contextos, sejam eles práticos ou teóricos.

A conclusão mais importante deste texto é a que está no teorema 22, ou seja, dadas três medidas de um triângulo esférico entre lados e ângulos, as demais três medidas podem ser encontradas utilizando a lei dos cossenos com um pequeno adendo, a observância das condições suficientes em cada caso a resolver.

A importância do trabalho consiste exatamente na busca de tais soluções utilizando-se da lei dos cossenos, sem utilizar a lei dos senos (ambas em suas versões esféricas), estabelecendo condições suficientes para que cada caso possa ser resolvido.

Entendemos que, dada a importância dos triângulos esféricos, a busca por métodos ou estratégias diversas para resolvê-los é de importância ímpar, entendendo que qualquer novo esforço nesse sentido é de suma importância para a geometria esférica e para a matemática como um todo.

Além disso, tendo em vista a linguagem usada no texto, com resultados obtidos a partir daqueles que usualmente se pode encontrar em um livro de ensino básico, podemos perceber que este texto pode ser acessível e útil na formação inicial do professor de matemática e também na sua formação continuada, fortalecendo e expandindo as discussões sobre triângulos, tão importantes na construção dos saberes matemáticos.

Por último, mas não menos importante, a conjectura 21 exibe resultados que estão em aberto, necessitando de uma demonstração formal, mostrando a necessidade de mais estudos no que se refere à resolução de triângulos esféricos.

COSINE RULE ON THE RESOLUTION OF SPHERICAL TRIANGLES

Abstract: The main objective here is to show sufficient conditions in which given three measures of a spherical triangle, between its sides and angles, the other three measures can be determined. Moreover, that such a determination can be made in terms of the spherical version of the cosine rule, even if two of the known measures are angles, due to the existence of the associated polar triangle.
Keywords: Spherical Geometry, Spherical Triangles; Resolution.

BIBLIOGRAFIA

CARMO, MANFREDO. MORGADO, AUGUSTO E WAGNER, EDUARDO. **Trigonometria e Números Complexos**. 3ª Edição. Rio de Janeiro. SBM, 2005.

COUTINHO, LÁZARO. **Trigonometria Esférica: A matemática de um espaço curvo**. 1ª Edição. Rio de Janeiro. Editora Interciência, 2015.

DOLCE, OSVALDO E POMPEO, JOSÉ NICOLAU. **Fundamentos da Matemática Elementar. Vol. 10 - Geometria Espacial. Posição e Métrica**. 7ª Edição. Editora Atual, 2013.

LIMA, ELON LAGES; CARVALHO, PAULO CÉSAR; WAGNER, EDUARDO E MORGADO, AUGUSTO CÉSAR. **A matemática do ensino médio. Vol. 1**. 9ª Edição. SBM, 2006.

SILVA, JOSÉ PEDRO. **As Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas**. 2017, 46 páginas. Dissertação de Mestrado em Matemática. PROFMAT, IMPA . Rio de Janeiro, 2017. (disponível em https://impa.br/wpcontent/uploads/2017/04/TCC_2017_jose_pedro_silva.pdf)